Théorie de Sen-Tate et Décomposition de Hodge-Tate pour les variétés

Rapport de stage 3A

Yicheng Zhou

Table des matières

Remerciements

Je tiens à remercier vivement mon tuteur, Gabriel Dospinescu, pour m'avoir introduit à ce sujet intéressant, pour les discussions efficaces, et pour la relecture et la correction du rapport. Je remercie également mon enseignant référent, Gaëtan Chenevier, pour m'avoir aidé à trouver ce stage.

1 Corps locaux

1.1 Rappels sur la théorie de Galois

1.1.1. Si K est un corps et si $\overline{K}$ est une clôture algébrique de K, on notera $\mathscr{G}_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

1.1.2. Soit M/K une extension galoisienne. On sait que M est la réunion de toutes ses sous-extensions galoisiennes finies L sur K. On a un isomorphisme naturel $\mathrm{Gal}(M/K) \simeq \varprojlim \mathrm{Gal}(L/K)$ qui fait de $\mathrm{Gal}(M/K)$ un groupe profini dont la topologie s'appelle la topologie de Krull.

Soit $\{L_i\}_{i\in I}$ un système inductif de sous-extensions galoisiennes finies de M/K telles que $\bigcup_{i\in I} L_i = M$, ordonné par inclusion. Alors l'application naturelle $\mathrm{Gal}(M/K) = \varprojlim_{i\in I} \mathrm{Gal}(L_i/K)$ est un isomorphisme de groupes profinis.

On a une correspondance de Galois

$$\begin{array}{rcl} \{\text{Sous-groupes fermés de } \mathrm{Gal}(M/K)\} & \leftrightarrow & \{\text{Sous-extensions de } M/K\} \\ H & \mapsto & M^H \\ \mathrm{Gal}(M/L) & \mapsfrom & L \end{array}$$

De plus, un sous-groupe H de $G = \mathrm{Gal}(M/K)$ est distingué si et seulement si l'extension M^H/K est galoisienne ; dans ce cas, l'application naturelle $G/H \to \mathrm{Gal}(M^H/K)$ est un isomorphisme.

1.1.3. On dit qu'une extension L/K est *abélienne* si elle est galoisienne et si son groupe de Galois est abélien. Toutes ses sous-extensions sont alors abéliennes par la correspondance de Galois.

1.2 Corps Valués

1.2.1. Une *valuation* sur un corps K (à valeurs réelles) est une application $v : K \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ telle que pour $x, y \in K$, on a (i) $v(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0$, (ii) $v(xy) = v(x) + v(y)$, (iii) $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$.

Soit K un corps muni d'une valuation v. L'ensemble $\mathcal{O}_K = \{x \in K : v(x) \geq 0\}$ est un sous-anneau de K, appelé l'*anneau de valuation* de K. C'est un anneau local avec l'idéal maximal $\mathfrak{m}_K = \{x \in K : v(x) > 0\}$. Notons $k_K = \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K$ le corps résiduel de $\mathcal{O}_K$. Si de plus la valuation v est *discrète* ($v(K^\times) \simeq \mathbf{Z}$), alors l'idéal $\mathfrak{m}_K$ est principal et on appellera *uniformisante* de $\mathcal{O}_K$ (ou de K) tout générateur π_K de $\mathfrak{m}_K$. Lorsque $S \subset K$ est un sous-ensemble, on note $v(S) = \min_{x\in S} v(x)$.

Un *corps local* est un corps complet pour une valuation discrète.

Fixons désormais un nombre premier p. Notons $\mathbf{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques, i.e. le complété du corps $\mathbf{Q}$ muni de la valuation p-adique. Fixons une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}_p}$ de $\mathbf{Q}_p$.

1.2.2 - Proposition. *Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$.*

(i) Il existe une unique valuation discrète v sur K qui étend la valuation p-adique sur $\mathbf{Q}_p$. Le corps résiduel k_K est un corps fini de caractéristique p.

(ii) Si L est une extension finie de K, tout $g \in \mathrm{Gal}(L/K)$ est une isométrie. En particulier, si $P \in K[X]$ est un polynôme irréductible, toutes ses racines ont la même valuation.

On note v_p l'unique valuation sur $\overline{\mathbf{Q}_p}$ qui étend la valuation p-adique sur $\mathbf{Q}_p$ et on l'appelle aussi la *valuation p-adique.* Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, on notera v_K le multiple de v_p normalisé par $v_K(\pi_K) = 1$, appelé la *valuation normalisée* sur K.

1.2.3 - Théorème. *(i) Le corps $\overline{\mathbf{Q}_p}$ n'est pas complet par rapport à v_p. Son corps résiduel est $k_{\overline{\mathbf{Q}_p}} = \overline{\mathbf{F}}_p$ et son groupe de valuation est $v_p(\overline{\mathbf{Q}_p}^\times) = \mathbf{Q}$.*

(ii) Le complété $\mathbf{C}_p$ de $\overline{\mathbf{Q}_p}$ est un corps algébriquement clos, de même corps résiduel et de même groupe de valuation que $\overline{\mathbf{Q}_p}$.

On appelle $\mathbf{C}_p$ le *corps des nombres complexes p-adiques* et on le notera désormais $\mathbf{C}$ pour simplicité. Pour une extension algébrique K de $\mathbf{Q}_p$, on notera $\widehat{K}$ son adhérence dans $\mathbf{C}$, qui est identifiée à son complété par rapport à la valuation v_p.

1.3 Ramification

Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$.

1.3.1. Soit L/K une extension algébrique. On note $e(L/K) = [v_p(L^\times):v_p(K^\times)]$ l'indice de ramification et $f(L/K) = [k_L:k_K]$ le degré d'inertie. L'extension L/K est dite *non ramifiée* si $e(L/K) = 1$, et *totalement ramifiée* si $f(L/K) = 1$. Si de plus L/K est finie, on a $[L:K] = e(L/K)f(L/K)$ et les formules

$$e(M/K) = e(M/L)e(L/K), \quad f(M/K) = f(M/L)f(L/K)$$

pour toute extension finie M/L. On note $e_K = e(K/\mathbf{Q}_p)$. La valuation normalisée v_K vérifie $v_K = e_K v_p$.

1.3.2 - Proposition. *Soit L/K une extension algébrique.*

(i) Il existe une unique sous-extension L_0/K, appelée sous-extension maximale non ramifiée de L/K *dans $\overline{K}$, telle que L_0/K soit non ramifiée et que L/L_0 soit totalement ramifiée.*

(ii) Si L/K est finie totalement ramifiée et π_L est une uniformisante de L, on a $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\pi_L]$ et π_L est une racine d'un polynôme d'Eisenstein sur $\mathcal{O}_K$. Inversement, si π est une racine d'un polynôme d'Eisenstein sur $\mathcal{O}_K$, alors $K(\pi)/K$ est totalement ramifiée et π est une uniformisante de $K(\pi)$.

Lorsque L/K est galoisienne, on appelle *groupe d'inertie $I_{L/K}$* de L/K le sous-groupe $\mathrm{Gal}(L/L_0)$ de $\mathrm{Gal}(L/K)$. C'est le noyau du morphisme de groupes naturel $\mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(k_L/k_K)$. On note K^{unr} l'extension maximale non ramifiée de K et I_K le groupe d'inertie de $\overline{K}/K$.

Si L/K est non ramifiée, elle est galoisienne et l'application naturelle $\mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(k_L/k_K)$ est bijective ; c'est alors une extension procyclique.

1.3.3 - Proposition. *Soit L/K une extension finie. Il existe $x \in \mathcal{O}_L$ tel que $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[x]$. Le $\mathcal{O}_K$-module $\mathcal{O}_L$ est libre de rang $[L:K]$.*

1.3.4. Groupes de ramification. Soit L/K une extension galoisienne finie. Soit v_L (*resp.* v_K) la valuation normalisée sur L (*resp.* K) (1.2.1). Notons $G = \mathrm{Gal}(L/K)$.

On note $i_G(g) = i_{L/K}(g) = \inf_{a\in\mathcal{O}_K} v_L(g(a)-a)$ pour $g \in G$. Si $x \in \mathcal{O}_L$ est tel que $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[x]$, on a alors $i_G(g) = v_L(g(x)-x)$ pour tout $g \in G$. La fonction i_G est constante sur chaque classe de conjugaison de G, et vérifie $i_G(gh^{-1}) \geq \min\{i_G(g), i_G(h)\}$ pour $g, h \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Ainsi, pour $u \geq -1$, $G_u = \{g \in G : i_G(g) \geq u+1\}$ est un sous-groupe distingué de G, appelé le u-ième groupe de ramification de G. Par exemple, on a $G_{-1} = G$, $G_0 = I_{L/K}$ (donc $\#G_0 = e(L/K)$) et $G_u = \{\mathrm{id}\}$ pour $u \geq \max_{g\neq\mathrm{id}} i_G(g)$. L'application $u \mapsto [G:G_u]$ est continue à gauche.

La filtration est compatible avec les sous-groupes : si F/K est une sous-extension de L/K, alors $\mathrm{Gal}(L/F)_u = \mathrm{Gal}(L/K)_u \cap \mathrm{Gal}(L/F)$. Cependant elle n'est pas compatible avec la variation de L.

Définissons une fonction $\mathbf{R}_{\geq -1} \to \mathbf{R}_{\geq -1}$ par $\phi_{L/K}(u) = \int_0^u [G_0 : G_t]^{-1} dt$. Elle est linéaire par morceaux, continue, croissante, concave et un homéomorphisme. On définit alors la filtration supérieure de $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ par $G^{\phi_{L/K}(u)} = G_u$, qui est compatible avec la variation de L grâce au théorème suivant.

1.3.5 - Théorème (Herbrand). *Si L' est une extension galoisienne finie de L, on a $\phi_{L'/K} = \phi_{L/K} \circ \phi_{L'/L}$, et l'image de* $\mathrm{Gal}(L'/K)^u$ *par l'application quotient* $\mathrm{Gal}(L'/K) \to \mathrm{Gal}(L/K)$ *est égale à* $\mathrm{Gal}(L/K)^u$.

Lorsque M/K est une extension galoisienne, on définit alors la filtration (supérieure) de $G = \mathrm{Gal}(M/K)$ par $G^u = \varprojlim \mathrm{Gal}(L/K)^u$ où L parcourt les sous-extensions galoisiennes finies de M/K.

1.4 $\mathbf{Z}_p$-extensions

Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Une extension de K est dite *$\mathbf{Z}_p$-extension* si elle est galoisienne de groupe de Galois isomorphe à $\mathbf{Z}_p$.

1.4.1. Considérons la condition suivante pour une extension algébrique K_∞ de K :

($\mathbf{Z}_p$-Ext) : *L'extension K_∞/K est abélienne et* $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ *a un sous-groupe ouvert isomorphe à $\mathbf{Z}_p$.*

Lorsque K_∞/K vérifie la condition ($\mathbf{Z}_p$-Ext), on pose $\Gamma_0 \subset \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ un sous-groupe ouvert isomorphe à $\mathbf{Z}_p$, $\Gamma_n = \Gamma_0^{p^n} \simeq p^n\mathbf{Z}_p$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $K_n = K_\infty^{\Gamma_n}$.

L'extension K_∞/K est infiniment ramifiée si et seulement si K_∞/K_0 l'est, ce qui revient au même de dire que l'image de I_{K_0} dans Γ_0 est infinie. Mais cette image est un sous-groupe compact de $\Gamma_0 \simeq \mathbf{Z}_p$ par continuité (car I_{K_0} est compact) ; donc elle est infinie si et seulement si elle est isomorphe à un certain Γ_n, autrement dit si K_∞/K_n est totalement ramifiée pour un certain entier n.

1.4.2 - Lemme. *Soit L/K une extension finie. Soit K_∞/K une extension algébrique. Posons $L_\infty = LK_\infty$.*

(i) Si K_∞/K vérifie la condition ($\mathbf{Z}_p$-Ext), alors L_∞/L la vérifie aussi.

(ii) Si de plus K_∞/K est infiniment ramifiée, alors L_∞/L l'est aussi.

Démonstration. (i) Notons $L_n = LK_n$. Le corps $F = L \cap K_\infty$ est une extension finie de K contenue dans K_∞, donc il existe $K_{n(L)}$ contenant $L \cap K_\infty$. Alors $L \cap K_\infty = L \cap K_n$ pour tout $n \geq n(L)$ et on a le diagramme d'extensions

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & L_\infty \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & L_{n(L)} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & K_\infty \arrow[dl, dash] \\
L \arrow[dr, dash] & & K_{n(L)} \arrow[dl, dash] & \\
 & L \cap K_\infty \arrow[d, dash] & & \\
 & K & &
\end{tikzcd}$$

Comme K_n/K (*resp.* K_∞/K) est galoisienne, L et K_n (*resp.* K_∞) sont linéairement disjointes sur F pour $n \geq n(L)$, et les applications naturelles $\mathrm{Gal}(L_n/L) \to \mathrm{Gal}(K_n/K)$ avec $n \geq n(L)$ et $\mathrm{Gal}(L_\infty/L) \to \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ sont des isomorphismes. En particulier, on obtient que L_∞/L est une extension abélienne et que $\mathrm{Gal}(L_\infty/L_{n(L)}) \simeq \mathrm{Gal}(K_\infty/K_{n(L)}) \simeq \mathbf{Z}_p$.

(ii) On peut supposer $K_\infty/K_{n(L)}$ totalement ramifiée (donc aussi $K_n/K_{n(L)}$). Alors pour $n \geq n(L)$, on a $f(L_n/K_{n(L)}) = f(L_n/K_n)f(K_n/K_{n(L)}) = f(L_n/K_n) \leq [L_n : K_n] = [L : F] < \infty$, et la suite $\big(f(L_n/K_{n(L)})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante par transitivité. Donc $f(L_n/K_{n(L)})$ se stabilise, $f(L_{n+1}/L_n) = 1$ pour n supérieur à un entier $n'(L) \geq n(L)$. Alors $L_n/L_{n'(L)}$ est totalement ramifiée pour tout $n \geq n'(L)$. Ainsi $L_\infty/L_{n'(L)}$ est totalement ramifiée. □

1.4.3 - Exemple. (i) Soit $\chi : \mathscr{G}_K \to \mathcal{O}_K^\times$ un caractère continu dont l'image contient un sous-groupe ouvert isomorphe à $\mathbf{Z}_p$. Posons $K_\infty = \overline{K}^{\ker\chi}$ l'*extension de K découpée par le caractère χ*. L'extension K_∞/K vérifie ($\mathbf{Z}_p$-Ext), elle est infiniment ramifiée si et seulement si $\chi(I_K)$ est infini ; on dit alors que χ est un caractère *infiniment ramifié.*

Si L/K est une extension finie, alors l'image du caractère restreint $\chi|_{\mathscr{G}_L}$ est un sous-groupe ouvert de $\mathrm{Im}\,\chi$, donc contient aussi un sous-groupe ouvert isomorphe à $\mathbf{Z}_p$. L'extension de L découpée par $\chi|_{\mathscr{G}_L}$ est $L_\infty = LK_\infty$. Si $\chi(I_K)$ est infini, $\chi(I_L)$ est aussi infini.

(ii) Prenons $\chi_{\mathrm{cyc}} : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Z}_p^\times$ le caractère cyclotomique. Son image $\chi_{\mathrm{cyc}}(I_{\mathbf{Q}_p}) = \mathbf{Z}_p^\times$ est infinie et contient un sous-groupe ouvert isomorphe à $\mathbf{Z}_p$ d'après ce qu'on va voir plus tard (1.6.6). Donc par (i), l'extension K_∞ de K découpée par χ_{cyc}, qui est égale à $K(\zeta_{p^\infty}) = \bigcup_n K(\zeta_{p^n})$ où ζ_{p^n} désigne une racine p^n-ième de l'unité dans $\overline{K}$, est une extension infiniment ramifiée de K vérifiant ($\mathbf{Z}_p$-Ext).

1.5 Trace et différente

1.5.1. Trace. Soit L/K une extension finie séparable des corps. On a l'application trace $\mathrm{Tr}_{L/K} : L \to K$ définie par la formule $\mathrm{Tr}_{L/K}(x) = \sum_\tau \tau(x)$ où τ parcourt $\mathrm{Hom}_K(L, \overline{K})$. La trace est transitive : si M/L est une extension finie, on a $\mathrm{Tr}_{L/K} \circ \mathrm{Tr}_{M/L} = \mathrm{Tr}_{M/K}$. Si de plus L/K est galoisienne, et si $F \subset K$ est un sous-corps tel que K/F soit galoisienne finie, alors $\mathrm{Tr}_{L/K}$ est $\mathrm{Gal}(L/F)$-équivariante. En effet, on a alors $\mathrm{Tr}_{L/K}(x) = \sum_{\tau\in\mathrm{Gal}(L/K)} \tau(x)$ et $\mathrm{Gal}(L/K)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Gal}(L/F)$.

Si $K/\mathbf{Q}_p$ est une extension algébrique et L/K est une extension finie, l'isométrie de l'action du groupe de Galois et la formule de la trace montrent que $\mathrm{Tr}_{L/K}(\mathcal{O}_L) \subset \mathcal{O}_K$.

Soient $K \subset L$ des extensions finies de $\mathbf{Q}_p$.

1.5.2. Différente. L'ensemble $I = \{x \in L : \mathrm{Tr}(x\mathcal{O}_L) \subset \mathcal{O}_K\}$ est un idéal fractionnaire de $\mathcal{O}_L$ et son inverse $\mathfrak{D}_{L/K} = I^{-1}$ sera appelée la *différente* de l'extension L/K. Comme I contient $\mathcal{O}_L$, $\mathfrak{D}_{L/K}$ est un idéal de $\mathcal{O}_L$.

1.5.3 - Proposition. *Pour $i \in \mathbb{N}$, on a* $\mathrm{Tr}_{L/K}(\mathfrak{m}_L^i) = \mathfrak{m}_K^{\lfloor (v_L(\mathfrak{D}_{L/K})+i)/e(L/K)\rfloor}$.

Démonstration. Pour $j \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{Tr}_{L/K}(\mathfrak{m}_L^i) \subset \mathfrak{m}_K^j$ si et seulement si $\mathrm{Tr}_{L/K}(\pi_K^{-j}\mathfrak{m}_L^i) \subset \mathcal{O}_K$, ou encore $\pi_K^{-j}\mathfrak{m}_L^i \subset \mathfrak{D}_{L/K}^{-1}$ par définition de la différente, d'où l'identité voulue. □

1.5.4 - Proposition. *(i) Si M/L est une extension finie, on a $\mathfrak{D}_{M/K} = \mathfrak{D}_{M/L} \cdot \mathfrak{D}_{L/K}$.*

(ii) Soit $x \in \mathcal{O}_L$ tel que $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[x]$ et soit P le polynôme minimal de x sur K. Alors $P \in \mathcal{O}_K[X]$ et $\mathfrak{D}_{L/K} = P'(x)\mathcal{O}_L$.

(iii) L'extension L/K est non ramifiée si et seulement si $\mathfrak{D}_{L/K} = \mathcal{O}_L$.

1.5.5 - Proposition. *On a*

$$v_K(\mathfrak{D}_{L/K}) = \frac{1}{e(L/K)} \sum_{\mathrm{id}\neq g\in G} i_G(g) = \int_{-1}^{+\infty} (1 - \frac{1}{\#\mathrm{Gal}(L/K)^u}) du.$$

Démonstration. Conservons les notations de (1.5.4, ii) et notons $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. On a $P(X) = \prod_{g\in G}(X - g(x))$, donc $P'(x) = \prod_{\mathrm{id}\neq g\in G}(x - g(x))$. On obtient alors

$$v_L(\mathfrak{D}_{L/K}) = v_L(P'(x)) = \sum\nolimits_{\mathrm{id}\neq g\in G} v_L(g(x) - x) = \sum\nolimits_{\mathrm{id}\neq g\in G} i_G(g).$$

Comme on a $i_G(g) = i + 1$ si et seulement si $g \in G_i \backslash G_{i+1}$ (pour $i \in \mathbf{Z}_{\geq -1}$), on obtient

$$\sum\nolimits_{\mathrm{id}\neq g\in G} i_G(g) = \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}_{\geq -1}} (k+1)(\#G_k - \#G_{k+1}) = \sum\nolimits_{k\in\mathbb{N}} (\#G_k - 1) = \int_{-1}^{+\infty} (\#G_t - 1) dt.$$

Par le changement de variable $u = \phi_{L/K}(t)$, et compte tenu de la relation $v_L = e(L/K)v_K = \#G_0 \cdot v_K$, on déduit les formules voulues. □

1.6 Groupes formels de Lubin-Tate

Soit E une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ avec $q = \#k_E$ et une uniformisante π.

1.6.1. Groupes formels. Un *groupe formel sur $\mathcal{O}_E$ (à un paramètre)* est une série $\mathcal{F} \in \mathcal{O}_K[\![X, Y]\!]$ vérifiant

(i) $\mathcal{F}(X, Y) = X + Y +$ termes de degré ≥ 2 ;

(ii) $\mathcal{F}(X, \mathcal{F}(Y, Z)) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(X, Y), Z)$;

(iii) $\mathcal{F}(X, Y) = \mathcal{F}(Y, X)$.

Si $\mathcal{G}$ est un autre groupe formel sur $\mathcal{O}_E$, on définit $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{h \in X \cdot \mathcal{O}_E[\![X]\!] : h(\mathcal{F}(X, Y)) = \mathcal{G}(h(X), h(Y))\}$ et $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$.

Un *$\mathcal{O}_E$-module formel* est un groupe formel $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{O}_E$ muni d'un morphisme d'anneaux $\mathcal{O}_E \to \mathrm{End}_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{F})$, $a \mapsto [a](X)$ tel que $[a](X) \equiv aX \bmod X^2$. Posons

$$\mathcal{L}_\pi = \{\varphi \in \mathcal{O}_E[\![X]\!] : \varphi(X) \equiv \pi X \bmod X^2, \varphi(X) \equiv X^q \bmod \pi\},$$

qui est non vide car il contient $\varphi(X) = \pi X + X^q$.

1.6.2 - Théorème (Lubin-Tate). *Pour tout $\varphi \in \mathcal{L}_\pi$, il existe un unique $\mathcal{O}_E$-module formel $\mathcal{F}_\varphi$ tel que $[\pi](X) = \varphi(X)$. La classe d'isomorphisme de $\mathcal{F}_\varphi$ ne dépend que de π, mais pas de $\varphi \in \mathcal{L}_\pi$.*

On appellera *groupe formel de Lubin-Tate sur $\mathcal{O}_E$* tout groupe formel $\mathcal{F}$ obtenu par le théorème à partir d'un certain $\varphi \in \mathcal{L}_\pi$. Soit désormais dans cette section $\mathcal{F}$ un tel groupe formel. On prendra garde que $\mathcal{F}$ dépend du choix de π.

1.6.3. On peut évaluer toute série $h \in \mathcal{O}_E[\![X]\!]$ en $x \in \mathfrak{m}_{\overline{E}}$; on a $h(x) \in E(x)$ puisque le corps $E(x)$, étant de dimension finie sur E, est un espace normé complet et que h est une série formelle à coefficients dans $\mathcal{O}_E$; on a aussi $h(g(x)) = g(h(x))$ pour tout $g \in \mathscr{G}_E$ car h est à coefficients dans $\mathcal{O}_E$; il en est de même pour $h \in \mathcal{O}_E[\![X, Y]\!]$.

Notons alors $\mathcal{F}(\mathfrak{m}_{\overline{E}})$ l'ensemble $\mathfrak{m}_{\overline{E}}$ muni de la structure de $\mathcal{O}_E$-module donnée par $x \oplus y = \mathcal{F}(x, y)$, $[a]x = [a](x)$ pour $a \in \mathcal{O}_E$, $x, y \in \mathfrak{m}_{\overline{E}}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{F}(\mathfrak{m}_{\overline{E}})[\pi^n]$ le $\mathcal{O}_E$-sous-module de $\mathcal{F}(\mathfrak{m}_{\overline{E}})$ des points de π^n-torsion. Ils forment un système projectif de $\mathcal{O}_E$-modules avec morphismes de transition la multiplication $[\pi]$. On définit $T_\pi(\mathcal{F}) = \varprojlim_n \mathcal{F}(\mathfrak{m}_{\overline{E}})[\pi^n]$ *le module de Tate de* $\mathcal{F}$, qui est naturellement un $\mathcal{O}_E$-module, s'identifiant à l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}(\mathfrak{m}_{\overline{E}})$ vérifiant $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = [\pi]u_n$ pour tout n, muni de la structure de $\mathcal{O}_E$-module définie composante par composante.

1.6.4 - Proposition. *Posons* $\Lambda_0 = \{0\}$ *et* $\Lambda_n = \mathcal{F}(\mathfrak{m}_{\overline{E}})[\pi^n]\backslash\mathcal{F}(\mathfrak{m}_{\overline{E}})[\pi^{n-1}]$ *pour* $n \geq 1$.

(i) On a $\#\Lambda_n = q^{n-1}(q-1)$, $\#\mathcal{F}(\mathfrak{m}_{\overline{E}})[\pi^n] = q^n$ *et* $v_E(z) = \frac{1}{q^{n-1}(q-1)}$ *pour tout* $z \in \Lambda_n$.

(ii) Si $z \in \Lambda_n$, *l'extension* $E(z)/E$ *est totalement ramifiée de degré* $q^{n-1}(q-1)$ *avec une uniformisante* z. *L'ensemble des conjugués de* z *par le groupe de Galois absolu* $\mathcal{G}_E$ *est égal à* Λ_n. *En particulier, le corps* $E_n = E(\Lambda_n)$ *est une extension galoisienne de* E.

Démonstration. Par (1.6.2), on peut supposer que $\mathcal{F}$ est donné par $\varphi(X) = \pi X + X^q \in \mathcal{L}_\pi$.

Par définition de la $\mathcal{O}_E$-structure sur $\mathcal{F}(\mathfrak{m}_{\overline{E}})$, $\mathcal{F}(\mathfrak{m}_{\overline{E}})[\pi^n]$ est l'ensemble des racines de $\varphi^{\circ n}(X)$. Ce dernier est un polynôme séparable qui se factorise $\varphi^{\circ(n-1)}(X)\cdot\big(Q\circ\varphi^{\circ(n-1)}\big)(X)$ où l'on a posé $Q(X) = \varphi(X)/X = \pi + X^{q-1}$. Donc Λ_n est l'ensemble des racines de $\big(Q\circ\varphi^{\circ(n-1)}\big)(X)$. On voit que $\big(Q\circ\varphi^{\circ(n-1)}\big)(X) \in \mathcal{O}_E[X]$ est un polynôme d'Eisenstein de degré $q^{n-1}(q-1)$; il est alors irréductible dans $E[X]$, donc d'après (1.2.2) ses racines sont conjuguées par $\mathcal{G}_E$ et ont la même valuation $\frac{1}{q^{n-1}(q-1)}$. Alors $\#\Lambda_n = q^{n-1}(q-1)$ et pour tout $z \in \Lambda_n$, $E(z)/E$ est une extension totalement ramifiée. Comme $\mathcal{F}(\mathfrak{m}_{\overline{E}})[\pi^n]$ est la réunion disjointe de $\Lambda_0,\ldots,\Lambda_n$, il est de cardinal q^n. □

1.6.5 - Proposition. *(i) Le module* $T_\pi(\mathcal{F})$ *est un* $\mathcal{O}_E$*-module libre de rang 1. Un élément* $u = (u_n)_n$ *de* $T_\pi(\mathcal{F})$ *est un générateur si et seulement si* $u_1 \neq 0$.

(ii) Le groupe $\mathcal{G}_E$ *agit sur* $T_\pi(\mathcal{F})$ *continûment et* $\mathcal{O}_E$*-linéairement, définissant un caractère continu* $\chi_\pi : \mathcal{G}_E \to \mathcal{O}_E^\times$ *par* $g(u) = \chi_\pi(g)u$ *pour* $g \in \mathcal{G}_E$ *et* $u \in T_\pi(\mathcal{F})$.

Démonstration. (i) Comme $\mathcal{F}(\mathfrak{m}_{\overline{E}})[\pi]$ est un $\mathcal{O}_E/(\pi)$-module, donc un k_E-espace vectoriel, de cardinal $q = \#k_E$, il est forcément isomorphe à $k_E = \mathcal{O}_E/(\pi)$. Maintenant, $\mathcal{F}(\mathfrak{m}_{\overline{E}})[\pi^n]$ est un $\mathcal{O}_E$-module de torsion de cardinal q^n, il est isomorphe à une somme directe de $\mathcal{O}_E/(\pi^{n_i})$ avec $n_i \in \mathbb{N}^*$, $\sum n_i = n$. Mais son $\mathcal{O}_E$-sous-module de π-torsion est $\mathcal{F}(\mathfrak{m}_{\overline{E}})[\pi] \simeq \mathcal{O}_E/(\pi)$. On en déduit que $\mathcal{F}(\mathfrak{m}_{\overline{E}})[\pi^n] \simeq \mathcal{O}_E/(\pi^n)$. Et on peut arranger cet isomorphisme pour que $[\pi] : \mathcal{F}(\mathfrak{m}_{\overline{E}})[\pi^{n+1}] \to \mathcal{F}(\mathfrak{m}_{\overline{E}})[\pi^n]$ soit compatible avec $\pi : \mathcal{O}_E/(\pi^{n+1}) \to \mathcal{O}_E/(\pi^n)$ pour tout $n \geq 1$. En prenant la limite projective, on obtient un isomorphisme de $\mathcal{O}_E$-modules $T_\pi(\mathcal{F}) \simeq \mathcal{O}_E$. Un élément $u = (u_n)_n$ est un générateur si et seulement si son image dans $\mathcal{O}_E/(\pi)$ est non nulle, autrement dit $u_1 \neq 0$.

(ii) Si $a \in \mathcal{O}_E$, comme $[a](X) \in \mathcal{O}_E[\![X]\!]$, la multiplication par $[a]$ commute avec l'action de $\mathcal{G}_E$ sur $\mathcal{F}(\mathfrak{m}_{\overline{E}})$. Donc $\mathcal{G}_E$ agit $\mathcal{O}_E$-linéairement sur les $\mathcal{F}(\mathfrak{m}_{\overline{E}})[\pi^n]$ qui sont de cardinal fini. En prenant la limite projective du système de $\mathcal{O}_E/(\pi^n)$-modules $\{[\pi] : \mathcal{F}(\mathfrak{m}_{\overline{E}})[\pi^{n+1}] \to \mathcal{F}(\mathfrak{m}_{\overline{E}})[\pi^n]\}_n$, on obtient une action $\mathcal{O}_E$-linéaire continue de $\mathcal{G}_E$ sur $T_\pi(\mathcal{F})$. □

1.6.6 - Exemple. Soient $E = \mathbf{Q}_p$, $\pi = p$ et $\mathcal{F} = X + Y + XY$. C'est le groupe formel de Lubin-Tate sur $\mathbf{Z}_p$ correspondant à $\varphi(X) = (1+X)^p - 1 \in \mathcal{L}_\pi$. On le notera $\widehat{\mathbf{G}}_m$ et l'appellera le *groupe multiplicatif formel.* L'application $\widehat{\mathbf{G}}_m(\mathfrak{m}_{\overline{\mathbf{Q}}_p}) \to 1 + \mathfrak{m}_{\overline{\mathbf{Q}}_p}$, $x \mapsto 1 + x$ (ce dernier étant un groupe multiplicatif) est un isomorphisme de groupes qui est $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$-équivariant. Le module de Tate $T_p(\widehat{\mathbf{G}}_m)$ s'identifie à

$$\mathbf{Z}_p(1) = \varprojlim_n \mu_{p^n} \tag{1.6.6.1}$$

où μ_{p^n} désigne le groupe multiplicatif des racines p^n-ièmes de l'unité dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ muni de l'action naturelle de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$; cette identification est $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$-équivariante. Le caractère χ_π devient alors le *caractère cyclotomique* χ_{cyc}.

1.6.7 - Lemme. *Avec les notations de (1.6.4), on a que* $E_n = E(z)$ *pour* $z \in \Lambda_n$.

Démonstration. Il suffit de montrer $\Lambda_n \subset E(z)$. Remarquons que $\mathcal{O}_E^\times$ agit sur Λ_n via la $\mathcal{O}_E$-structure de $\mathcal{F}(\mathfrak{m}_{\overline{E}})$. La $\mathcal{O}_E^\times$-orbite de z est contenue dans $E(z)$ d'après le début de (1.6.3). D'autre part concernant le stabilisateur, on a $[a]z = z$ si et seulement si $[a-1]z = 0$, ou encore $a - 1 \in \pi^n\mathcal{O}_E$. On obtient alors une application injective

$$\mathcal{O}_E^\times/1 + \pi^n\mathcal{O}_E \to \Lambda_n, \quad \overline{a} \mapsto [a]z$$

qui est en fait bijective pour des raisons de cardinalité. Donc $\Lambda_n \subset E(z)$. □

1.6.8 - Proposition. *Avec les notations de (1.6.4), l'extension $E_\infty^\pi = \bigcup_n E_n$ de E est galoisienne infinie et totalement ramifiée. Le caractère χ_π induit un isomorphisme* $\mathrm{Gal}(E_\infty^\pi/E) \simeq \mathcal{O}_E^\times$.

Démonstration. Par (1.6.7), (1.6.4) et la définition de Λ_n, on sait que $E_n \subset E_{n+1}$ et que chaque extension E_n/E est galoisienne totalement ramifiée de degré $q^{n-1}(q-1)$, donc E_∞^π/E est une extension galoisienne infinie totalement ramifiée ; de plus, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(E_n/E)$ agit transitivement et librement sur Λ_n, donnant une bijection $\mathrm{Gal}(E_n/E) \to \Lambda_n$, $g \mapsto g(z)$. L'application bijective

$$\chi_\pi^{(n)} : \mathrm{Gal}(E_n/E) \to \mathcal{O}_E^\times/1+\pi^n\mathcal{O}_E, \quad g \mapsto \text{l'unique classe } \overline{a} \text{ telle que } g(z) = [a]z \tag{1.6.8.1}$$

est un morphisme de groupes indépendant du choix de $z \in \Lambda_n$; en effet, soit $z' = [b]z \in \Lambda_n$ avec $b \in \mathcal{O}_E^\times$, alors $g(z') = g([b]z) = [b]g(z) = [b][a]z = [a][b]z = [a]z'$ où l'on a utilisé la $\mathscr{G}_E$-équivariance de $[b]$ (1.6.3). De plus, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gal}(E_{n+1}/E) \arrow[r, "\chi_\pi^{(n+1)}"] \arrow[d] & \mathcal{O}_E^\times/1+\pi^{n+1}\mathcal{O}_E \arrow[d] \\
\mathrm{Gal}(E_n/E) \arrow[r, "\chi_\pi^{(n)}"] & \mathcal{O}_E^\times/1+\pi^n\mathcal{O}_E
\end{tikzcd}$$

est commutatif où les flèches verticales sont celles évidentes. En prenant la limite projective de $\chi_\pi^{(n)}$, on obtient un isomorphisme de groupes profinis $\mathrm{Gal}(E_\infty^\pi/E) \to \mathcal{O}_E^\times$. La composée $\mathscr{G}_E \to \mathrm{Gal}(E_\infty^\pi/E) \to \mathcal{O}_E^\times$ coïncide avec le caractère χ_π d'après (1.6.5) et (1.6.8.1). □

1.6.9. Gardons les notations de (1.6.8). On se propose de calculer la filtration (supérieure) du groupe $\mathrm{Gal}(E_\infty^\pi/E)$.

Calculons d'abord les groupes de ramification de $\mathrm{Gal}(E_n/E)$ en utilisant l'isomorphisme (1.6.8.1). Soit $z \in \Lambda_n$. Soit d'abord $a = 1+v\pi^i$ avec $v \in \mathcal{O}_E^\times$, $1 \leq i \leq n-1$. On a $[a]z = z + [v][\pi^i]z$. On sait que $[\pi^i]z \in \Lambda_{n-i}$ et puis aussi $[a]z - z = [v][\pi^i]z \in \Lambda_{n-i}$, d'où

$$v_E([a]z - z) = \frac{1}{q^{n-i-1}(q-1)} = q^i v_E(z) \tag{1.6.9.1}$$

par le calcul (1.6.4). Comme z est une uniformisante de $E(z) = E_n$ (1.6.4) (1.6.7), on a $v_{E_n} = v_E(z)^{-1} \cdot v_E$. Donc $i_{E_n/E}(a) = q^i$. Soit maintenant $a \in \mathcal{O}_E^\times \backslash 1+\pi\mathcal{O}_E$. Alors $a-1 \in \mathcal{O}_E^\times$, donc $[a]z - z = [a-1]z \in \Lambda_n$, l'identité (1.6.9.1) est vérifiée avec $i = 0$. Donc $i_{E_n/E}(a) = 1$ dans ce cas.

On en déduit la filtration des groupes de ramification du groupe $G = \mathrm{Gal}(E_n/E)$

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{O}_E^\times/1+\pi^n\mathcal{O}_E & \simeq & \mathrm{Gal}(E_n/E) = G_0 \\
1+\pi\mathcal{O}_E/1+\pi^n\mathcal{O}_E & \simeq & \mathrm{Gal}(E_n/E_1) = G_1 = \cdots = G_{q-1} \\
1+\pi^2\mathcal{O}_E/1+\pi^n\mathcal{O}_E & \simeq & \mathrm{Gal}(E_n/E_2) = G_q = \cdots = G_{q^2-1} \\
& \cdots & \\
\{1\} & \simeq & \{\mathrm{id}\} = G_{q^{n-1}} = \cdots = G_{q^n-1} = \cdots
\end{array} \tag{1.6.9.2}$$

d'où la filtration supérieure $\mathrm{Gal}(E_n/E)^u = \mathrm{Gal}(E_n/E_j)$ où $0 \leq j \leq n$, $u \in (j-1, j]$. La filtration du groupe $\mathrm{Gal}(E_\infty^\pi/E)$ est alors donnée par

$$\mathrm{Gal}(E_\infty^\pi/E)^u = \mathrm{Gal}(E_\infty^\pi/E_j), \quad j \in \mathbb{N},\ u \in (j-1, j] \tag{1.6.9.3}$$

qui est isomorphe à $\mathcal{O}_E^\times$ si $i = 0$ et à $1+\pi^i\mathcal{O}_E$ si $i > 0$ via l'isomorphisme $\mathrm{Gal}(E_\infty^\pi/E) \simeq \mathcal{O}_E^\times$.

1.6.10 - Corollaire. *On a $v_E(\mathfrak{D}_{E_n/E}) = n - \frac{1}{q-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.*

Démonstration. D'après (1.5.5) et le calcul (1.6.9), on a

$$v_E(\mathfrak{D}_{E_n/E}) = \int_{-1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\lceil u \rceil}\right) du = \left(1 - \frac{1}{q^{n-1}(q-1)}\right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{q^i}\right) = n - \frac{1}{q-1}.$$ □

1.6.11. Une *forme différentielle sur $\mathcal{F}$* est un élément $\omega(X) = \alpha(X)dX \in \mathcal{O}_E[\![X]\!]dX$. Si $h(X) \in X \cdot \mathcal{O}_E[\![X]\!]$, alors $\omega(h(X)) = \alpha(h(X))h'(X)dX$. On dit que ω est *invariante* si elle vérifie

$$\alpha(\mathcal{F}(X,Y))d(\mathcal{F}(X,Y)) = \alpha(X)dX + \alpha(Y)dY. \tag{1.6.11.1}$$

On notera $\Omega_{\mathcal{F}}$ l'ensemble des formes différentielles invariantes sur $\mathcal{F}$. C'est un $\mathcal{O}_E$-module libre de rang 1 engendré par

$$\omega_0 = dX/\partial_1\mathcal{F}(0,X) \tag{1.6.11.2}$$

où ∂_1 signifie la dérivée par rapport à la première variable. Si $a \in \mathcal{O}_E$, on a $[a] \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{F})$et puis $\omega_0([a](X)) \in \Omega_{\mathcal{F}}$, qui est alors un multiple de $\omega_0(X)$. En développant, on a $\omega_0(X) = (1+\deg \geq 1)dX$ et $\omega_0([a](X)) = (a+\deg \geq 1)dX$, donc $\omega_0([a](X)) = a\cdot\omega_0(X)$. Ainsi, pour tous $a \in \mathcal{O}_E$ et $\omega \in \Omega_{\mathcal{F}}$, on a

$$\omega \circ [a] = a \cdot \omega \tag{1.6.11.3}$$

1.6.12 - Exemple. Soient $E = \mathbf{Q}_p$, $\pi = p$ et $\mathcal{F} = \widehat{\mathbf{G}}_m$. Alors $\Omega_{\mathcal{F}}$ est un $\mathbf{Z}_p$-module libre de rang 1 engendré par $\omega_0 = dX/(1+X)$.

1.7 Théorie du corps de classes local

Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ avec $q = \#k_K$ et une uniformisante π. Soit K_∞^π l'extension totalement ramifiée de K construite comme dans (1.6.8) à partir d'un groupe formel de Lubin-Tate $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{O}_K$. Alors les extensions K_∞^π et K^{unr} de K sont linéairement disjointes. Soit Fr_q l'élément de $\mathrm{Gal}(K^{unr}/K)$ qui correspond au Frobenius $x \mapsto x^q$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}_p}/\mathbf{F}_q)$.

1.7.1 - Théorème. *Soit* $\mathrm{Art} : K^\times = \mathcal{O}_K^\times \times \pi^{\mathbf{Z}} \to \mathrm{Gal}(K^\pi K^{unr}/K) = \mathrm{Gal}(K^\pi/K)\times\mathrm{Gal}(K^{unr}/K)$ *l'application (de réciprocité) définie par* $u \mapsto \chi_\pi^{-1}(u^{-1})$ *(1.6.8) et* $\pi \mapsto \mathrm{Fr}_q$.

(i) L'extension $K_\infty^\pi K^{unr}$ *est l'extension abélienne maximale* K^{ab} *de* K*. L'application* Art *ne dépend pas du choix de* π *et* $\mathcal{F}$.

(ii) Pour toute extension abélienne finie L/K*, on a* $\mathrm{Art}\big(\mathrm{N}_{L/K}(L^\times)\big)|_L = \mathrm{id}$ *et cela induit un isomorphisme* $K^\times/\mathrm{N}_{L/K}(L^\times) \simeq \mathrm{Gal}(L/K)$.

(iii) L'association $L \mapsto \mathrm{N}_{L/K}(L^\times)$ *donne une bijection entre l'ensemble des extensions abéliennes finies de* K *et l'ensemble des sous-groupes ouverts d'indice fini de* $K^\times$.

1.7.2 - Proposition (Hasse-Arf). *Pour toute extension abélienne* K'/K*, l'application* $\mathrm{Art} : K^\times \to \mathrm{Gal}(K'/K)$ *induit une surjection* $U_K^y \to \mathrm{Gal}(K'/K)^y$ *pour* $y \in \mathbf{R}_{\geq 0}$*, où l'on a posé* $U_K^y = 1+\pi^n\mathcal{O}_K$ *si* $y \in (n-1,n]$, $n \in \mathbb{N}^*$*, et* $U_K^0 = \mathcal{O}_K^\times$.

Démonstration. Si $K' = K_\infty^\pi$, cela résulte de (1.6.9).

Si $K' = K^{ab} = K_\infty^\pi K^{unr}$ (1.7.1, i), l'application $\mathrm{Gal}(K'/K) \to \mathrm{Gal}(K_\infty^\pi/K)$ induit un isomorphisme $\mathrm{Gal}(K'/K)^0 = \mathrm{Gal}(K'/K^{unr}) \to \mathrm{Gal}(K_\infty^\pi/K) = \mathrm{Gal}(K_\infty^\pi/K)^0$ et alors des isomorphismes entre la filtration supérieure d'indice positif. Ce cas résulte alors du cas précédent.

Le cas général en découle, compte tenu de (1.3.5) et la définition de la filtration supérieure pour une extension galoisienne infinie. □

1.7.3 - Corollaire. *Pour toute extension abélienne* K'/K*, la filtration* $\mathrm{Gal}(K'/K)^y$ *est continue à gauche par rapport à* $y \in \mathbf{R}_{\geq 0}$*, et ses points de rupture* y *sont tous entiers.*

1.8 Étude de la ramification

Soient $K/\mathbf{Q}_p$ une extension finie et K_∞/K une extension infiniment ramifiée vérifiant ($\mathbf{Z}_p$-Ext). Fixons d'abord des notations et étudions ensuite la ramification du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ qui sera importante pour la théorie de Sen-Tate que nous présenterons dans le chapitre 3.

1.8.1. Notations. Soit Γ_0 un sous-groupe ouvert de $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ isomorphe à $\mathbf{Z}_p$ tel que K_∞ soit totalement ramifiée sur $K_0 = K_\infty^{\Gamma_0}$. On posera $\Gamma_n = \Gamma_0^{p^n}$ et $K_n = K_\infty^{\Gamma_n}$ comme dans (1.4.1). On notera $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$. Soit γ_0 un générateur topologique de Γ_0. Posons alors $\gamma_n = \gamma_0^{p^n}$ qui est un générateur topologique de Γ_n.

Si L/K est une extension finie de K, on notera $L_\infty = LK_\infty$, c'est une extension de L vérifiant les mêmes conditions que K_∞/K. Cependant, on notera $L_n = LK_n$ sauf mention contraire, de sorte que L/L_0 pourrait être non totalement ramifiée. Mais cette nuance ne posera pas de problème, car on prendra souvent n suffisamment grand.

1.8.2 - Théorème (Tate). *Soit* $K/\mathbf{Q}_p$ *une extension finie et soit* K_∞/K *une extension galoisienne infiniment ramifiée vérifiant* ($\mathbf{Z}_p$*-Ext). Si* M/K_∞ *est une extension finie, alors* $\mathrm{Tr}_{M/K_\infty}(\mathcal{O}_M) \supset \mathfrak{m}_{K_\infty}$.

Démonstration. Soit M' une extension galoisienne finie de K_∞ contenant M. Comme $\mathrm{Tr}_{M'/K_\infty} = \mathrm{Tr}_{M/K_\infty} \circ \mathrm{Tr}_{M'/M}$ et $\mathrm{Tr}_{M'/M}(\mathcal{O}_{M'}) \subset \mathcal{O}_M$, on se ramène au cas où M/K_∞ est finie *galoisienne.* Il existe alors un extension finie *galoisienne* L/K telle que $L_\infty = M$. En effet, soit $P \in K_\infty[X]$ un polynôme dont le corps de décomposition sur K_∞ est M. Comme $K_\infty = \bigcup K_n$, il existe K_n contenant les coefficients de P. Alors le corps de décomposition L de P sur K_n convient.

En remplaçant K par un certain K_n (ce qui ne change pas K_∞, ni l'hypothèse sur K_∞/K), on peut alors supposer que *K_∞/K est une $\mathbf{Z}_p$-extension totalement ramifiée*, que *L/K est une extension galoisienne finie telle que $M = L_\infty$* et que *L et K_n sont linéairement disjointes sur K*. On a alors $\Gamma_K = \Gamma_0$.

Selon (1.7.3), il existe une suite croissante $(y_m)_{m\in\mathbf{Z}_{\geq -1}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ telle que $\Gamma_K^y = \Gamma_m \simeq p^m\mathbf{Z}_p$ pour $y \in (y_{m-1}, y_m]$, $m \in \mathbb{N}$.

1.8.2.1 - Lemme. *On a $y_m \neq +\infty$ et la suite $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.*

Démonstration. Conservons les notations de (1.7.2), les applications $\mathrm{Art} : U_K^i \to \Gamma_K^i$ étant surjectives, et K_∞/K étant une $\mathbf{Z}_p$-extension, les Γ_K^i sont des sous-groupes ouverts de $\Gamma_K^0 = \Gamma_0 \simeq \mathbf{Z}_p$ car K_∞/K est totalement ramifiée. Donc il existe $m(i) \in \mathbb{N}$ tel que Γ_K^i soit identifié à $\Gamma_{m(i)} \simeq p^{m(i)}\mathbf{Z}_p$. On a $y_{m(i)-1} < i \leq y_{m(i)}$. Alors, d'une part, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\Gamma_K^i \subset \Gamma_m$ par la continuité de Art, puis $m(i) - 1 \geq m$, de sorte que $y_m \leq y_{m(i)-1} \leq i$, d'où $y_m \neq +\infty$; d'autre part, la suite $\{m(i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ est croissante et $y_{m(i)} \geq i$ tend vers $+\infty$. □

1.8.2.2 - Lemme. *On a*

$$\#\mathrm{Gal}(K_n/K)^y = \begin{cases} p^{n-m} & y \in (y_{m-1}, y_m],\ 0 \leq m \leq n \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Soit $y \in (y_{m-1}, y_m]$ avec $m \geq 0$. La compatibilité (1.3.5) montre $\mathrm{Gal}(K_n/K)^y$ est l'image de $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)^y \simeq p^m\mathbf{Z}_p$ dans $\mathrm{Gal}(K_n/K) \simeq p^n\mathbf{Z}_p$, d'où les résultats. □

1.8.2.3 - Lemme. *La suite $\big(p^n v_K(\mathfrak{D}_{L_n/K_n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*

Démonstration. Calculons par (1.5.5)

$$v_K(\mathfrak{D}_{L_n/K_n}) = v_K(\mathfrak{D}_{L_n/K}) - v_K(\mathfrak{D}_{K_n/K}) = \int_{-1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{\#\mathrm{Gal}(K_n/K)^y} - \frac{1}{\#\mathrm{Gal}(L_n/K)^y}\Big)dy.$$

La fonction sous l'intégrale est positive car l'application $\mathrm{Gal}(L_n/K)^y \to \mathrm{Gal}(K_n/K)^y$ est surjective par la compatibilité (1.3.5). Montrons qu'elle s'annule pour y grand. Les extensions L/K et K_n/K étant galoisiennes finies linéairement disjointes, l'application naturelle

$$\mathrm{Gal}(L_n/K) \to \mathrm{Gal}(K_n/K) \times \mathrm{Gal}(L/K)$$

est un isomorphisme de groupes. L'extension L/K étant finie, il existe h tel que $\mathrm{Gal}(L/K)^y = \{\mathrm{id}\}$ si $y \geq h$. Par la compatibilité de la filtration supérieure, $\mathrm{Gal}(L_n/K)^y$ s'envoie surjectivement sur $\mathrm{Gal}(K_n/K)^y$; c'est injectif si $y \geq h$ car alors $\mathrm{Gal}(L_n/K)^y$ agit trivialement sur L. Donc la fonction sous l'intégrale s'annule si $y \geq h$. On obtient

$$v_K(\mathfrak{D}_{L_n/K_n}) \leq \int_{-1}^{h}\Big(\frac{1}{\#\mathrm{Gal}(K_n/K)^y} - \frac{1}{\#\mathrm{Gal}(L_n/K)^y}\Big)dy \leq \int_{-1}^{h}\frac{1}{\#\mathrm{Gal}(K_n/K)^y}dy$$

Selon (1.8.2.1), il existe m_1 qui ne dépend pas de n tel que $y_{m_1} > h$. Alors on obtient

$$v_K(\mathfrak{D}_{L_n/K_n}) \leq \int_{-1}^{y_{m_1}}\frac{1}{\#\mathrm{Gal}(K_n/K)^y}dy = \sum_{m=0}^{m_1}(y_m - y_{m-1})p^{-(n-m)} = p^{-n}\sum_{m=0}^{m_1}(y_m - y_{m-1})p^m.$$

Donc la suite $\{p^n v_K(\mathfrak{D}_{L_n/K_n})\}$ est bornée. □

Soit maintenant $\alpha \in \mathfrak{m}_{K_\infty}$. Il existe alors n_α tel que pour tout $n \geq n_\alpha$, on ait $\alpha \in \mathfrak{m}_{K_n}$. Par (1.5.3), on a $\mathrm{Tr}_{L_n/K_n}(\mathcal{O}_{L_n}) = \mathfrak{m}_{K_n}^{\lfloor v_{K_n}(\mathfrak{D}_{L_n/K_n})\rfloor}$; sa valuation

$$v_K(\mathrm{Tr}_{L_n/K_n}(\mathcal{O}_{L_n})) = e(K_n/K)^{-1}\lfloor v_{K_n}(\mathfrak{D}_{L_n/K_n})\rfloor = p^{-n}\lfloor p^n v_K(\mathfrak{D}_{L_n/K_n})\rfloor$$

tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ selon (1.8.2.3). Mais $v_K(\alpha) > 0$, donc il existe n tel que $\alpha \in \mathrm{Tr}_{L_n/K_n}(\mathcal{O}_{L_n})$. Pour conclure, par notre hypothèse sur L et K_∞ (linéairement disjointes sur K et L/K galoisienne, donc aussi L_n et K_∞ sur K_n et L_n/K_n galoisienne), l'application naturelle $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty) \to \mathrm{Gal}(L_n/K_n)$ est bijective, montrant que $\mathrm{Tr}_{L_\infty/K_\infty}(\mathcal{O}_{L_n}) = \mathrm{Tr}_{L_n/K_n}(\mathcal{O}_{L_n})$. □

1.8.3 - Remarque. Sous l'hypothèse de (1.8.2), on a $\mathrm{Tr}_{M/K_\infty}(\mathfrak{m}_M) = \mathfrak{m}_{K_\infty}$. En effet, soit $x \in \mathfrak{m}_{K_\infty}$, il existe $\alpha \in \mathfrak{m}_{K_\infty}$ de petite valuation tel que $x\alpha^{-1} \in \mathfrak{m}_{K_\infty}$; on a $x\alpha^{-1} \in \mathrm{Tr}_{M/K_\infty}(\mathcal{O}_M)$ selon le théorème, donc $x \in \mathrm{Tr}_{M/K_\infty}(\alpha\mathcal{O}_M) \subset \mathrm{Tr}_{M/K_\infty}(\mathfrak{m}_M)$.

1.8.4 - Corollaire. *Sous l'hypothèse de (1.8.2), pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $\alpha \in M$ *tel que* $\mathrm{Tr}_{M/K_\infty}(\alpha) = 1$ *et* $v_p(\alpha) \geq -\epsilon$.

Démonstration. Comme la valuation sur K_∞ est non discrète, il existe $x \in \mathfrak{m}_{K_\infty}$ tel que $v_p(x) < \epsilon$. Il existe par le théorème $y \in \mathcal{O}_M$ tel que $\mathrm{Tr}_{M/K_\infty}(y) = x$. Il suffit de prendre $\alpha = yx^{-1}$. □

Donnons un lemme plus précis que (1.8.2.1).

1.8.5 - Lemme. *Soit* $K/\mathbf{Q}_p$ *une extension finie. Soit* K_∞/K *une* $\mathbf{Z}_p$*-extension totalement ramifiée. Avec les notations de (1.8.2.1), il existe* m_0 *tel que* $y_{m+1} = y_m + e_K$ *pour tout* $m \geq m_0$.

Démonstration. Rappelons que selon (1.7.3), il existe une suite croissante $(y_m)_{m\in\mathbf{Z}_{\geq -1}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ telle que $\Gamma_K^y = \Gamma_m \simeq p^m\mathbf{Z}_p$ pour $y \in (y_{m-1}, y_m]$, $m \in \mathbb{N}$. On sait que l'exponentielle induit un isomorphisme $\mathfrak{m}_K^i \to 1+\mathfrak{m}_K^i$ pour $i \geq \frac{2e_K}{p-1}$. On a déjà montré (1.7.2) que y_m sont des entiers (finis) et tendent vers l'infini. Donc il existe m_0 tel que $y_{m-1} \geq \frac{2e_K}{p-1}$ pour $m \geq m_0$.

Il existe $m \geq m_0$ tel que $y_{m-1} \neq y_m$ car $(y_m)_m$ tend vers l'infini. Fixons un tel m. Montrons que $y_m = y_{m-1}+e_K$ et $y_m \neq y_{m+1}$. Le lemme en découlera par récurrence sur m.

Notons $\mathrm{art} = \mathrm{Art}\circ\exp$. Écrivons ici la loi de groupe sur les Γ_n *additivement.* D'abord, on a $\Gamma_K^{y_{m-1}+e_K+1} = \mathrm{art}(\mathfrak{m}_K^{y_{m-1}+e_K+1}) = \mathrm{art}(p\mathfrak{m}_K^{y_{m-1}+1}) = p\Gamma_m = \Gamma_{m+1}$, donc $y_m < y_{m-1}+e_K+1$. Montrons ensuite que $\Gamma_K^{y_{m-1}+e_K}/\Gamma_{m+1} \neq 0$; on en déduira que $\Gamma^{y_{m-1}+e_K} = \Gamma_m$ et donc $y_m = y_{m-1}+e_K$.

Pour cela, soit π_K une uniformisante de K et calculons $\Gamma_K^{y_{m-1}+e_K} = \mathrm{art}(\mathfrak{m}_K^{y_{m-1}+e_K})$. Soit $F = K\cap\mathbf{Q}_p^{unr}$ la sous-extension maximale non ramifiée de $K/\mathbf{Q}_p$. Alors π_K vérifie une équation d'Eisenstein $\pi_K^{e_K} + a_{e_K-1}\pi_K^{e_K-1} + \cdots + a_1\pi_K + pa_0 = 0$ où $a_{e_K-1},\ldots,a_1 \in p\mathcal{O}_F$ et $a_0 \in \mathcal{O}_F^\times$. Pour tout $t \in \mathcal{O}_K$, en multipliant par $\pi_K^{y_{m-1}}t$, on obtient

$$\mathrm{art}(t\pi_K^{y_{m-1}+e_K}) \in p\cdot\mathrm{art}(ta_0\pi_K^{y_{m-1}}) + p\Gamma_m.$$

Ainsi, on a $\mathrm{art}(\mathfrak{m}_K^{y_{m-1}+e_K})/\Gamma_{m+1} = p\cdot\mathrm{art}(\mathfrak{m}_K^{y_{m-1}})/p\Gamma_m \simeq \Gamma_K^{y_{m-1}}/\Gamma_m \neq 0$, ce qui permet de conclure. □

1.8.6 - Lemme. *On a* $v_p(\mathfrak{D}_{K_n/K}) = n + c + O(p^{-n})$ *pour* $n \in \mathbb{N}$ *avec* c *une constante.*

Démonstration. Comme $\mathfrak{D}_{K_n/K} = \mathfrak{D}_{K_n/L}\cdot\mathfrak{D}_{L/K}$ pour tout corps intermédiaire, on peut remplacer K par une sous-extension finie K_0 de K_∞/K telle que K_∞/K_0 soit une $\mathbf{Z}_p$*-extension totalement ramifiée.* D'après (1.5.5) et (1.8.2.2), on a

$$v_K(\mathfrak{D}_{K_n/K}) = \int_{-1}^{+\infty}\Big(1 - \frac{1}{\#\mathrm{Gal}(K_n/K)^y}\Big)dy = \sum_{m=0}^{n}(y_m - y_{m-1})(1-p^{m-n}).$$

On en conclut, compte tenu du comportement asymptotique de y_m (1.8.5) et de l'égalité $v_K = e_K v_p$. □

1.8.7 - Corollaire. $v_p(\mathfrak{D}_{K_{n+1}/K_n}) = 1 + O(p^{-n})$. □

1.8.8 - Corollaire. *Il existe une constante* $c > 0$ *telle que pour* $x \in K_{n+1}$ *on ait*

$$v_p\Big(\frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{K_{n+1}/K_n}(x)\Big) \geq v_p(x) - p^{-n}c.$$

Démonstration. Selon (1.5.3), on a $v_{K_n}\big(\mathrm{Tr}_{K_{n+1}/K_n}(x)\big) \geq \lfloor v_{K_n}(\mathfrak{D}_{K_{n+1}/K_n}) + v_{K_n}(x)\rfloor \geq v_{K_n}(\mathfrak{D}_{K_{n+1}/K_n}) + v_{K_n}(x) - 1$, donc

$$\begin{aligned} v_p\big(\mathrm{Tr}_{K_{n+1}/K_n}(x)\big) &\geq v_p(\mathfrak{D}_{K_{n+1}/K_n}) + v_p(x) - \frac{1}{e_{K_n}} \\ &= 1 + O(p^{-n}) + v_p(x) - \frac{1}{p^n e_{K_0}} \end{aligned}$$

car $e(K_n/K_0) = [K_n : K_0] = p^n$. Le lemme en résulte. □

2 Représentations galoisiennes

2.1 Représentations semi-linéaires

2.1.1. Un *groupe topologique* G est un groupe muni d'une topologie pour laquelle l'application $G \times G \to G$, $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ est continue. Soient G et M deux groupes topologiques. On dit que G *agit continûment sur* M si on se donne un morphisme de groupes $\rho : G \to \mathrm{End}_{\mathrm{Grp}}(M)$ tel que l'application $G \times M \to M$ soit continue. Lorsque M est abélien, on dit que M est un *G-module topologique*.

Un *anneau topologique* Λ est un anneau (commutatif unitaire) muni d'une topologie pour laquelle les applications $\Lambda \times \Lambda \to \Lambda$, $(x,y) \to x - y$ et $\Lambda \times \Lambda$, $(x,y) \to xy$ sont continues. Le groupe $\mathrm{GL}_d(\Lambda)$ est un groupe topologique pour la topologie induite par $\mathrm{GL}_d(\Lambda) \to \mathrm{Mat}_d(\Lambda) \times \Lambda$, $g \mapsto (g, (\det g)^{-1})$ (où on munit $\mathrm{Mat}_d(\Lambda)$ de la topologie produit). Si la prise de l'inverse $\Lambda^\times \to \Lambda^\times$, $\lambda \mapsto \lambda^{-1}$ est continue, cette topologie sur $\mathrm{GL}_d(\Lambda)$ coïncide avec celle induite de $\mathrm{Mat}_d(\Lambda)$. Lorsque Λ est muni d'une action continue de G, on dit que Λ est un *G-anneau topologique*; alors G agit continûment sur $\mathrm{GL}_d(\Lambda)$.

2.1.2. Soient G un groupe topologique et Λ un G-anneau topologique. Une *Λ-représentation semi-linéaire (libre de type fini) de* G est un Λ-module M libre de type fini muni de la topologie produit, sur lequel G agit continûment et tel que $g(\lambda m) = g(\lambda) g(m)$ pour tous $\lambda \in \Lambda$, $m \in M$. Notons $\mathrm{Rep}_\Lambda(G)$ la catégorie des Λ-représentations semi-linéaires de G, les morphismes étant les applications Λ-linéaires G-équivariantes (ou simplement dit $\Lambda[G]$-linéaires). La catégorie $\mathrm{Rep}_\Lambda(G)$ possède des sommes directes, des produits tensoriels, des Hom internes et des duaux.

2.1.3 - Exemple. Soit $K \subset \mathbf{C}$ un sous-corps contenant $\mathbf{Q}_p$. Alors $\mathscr{G}_K (\hookrightarrow \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$ agit continûment sur $\mathbf{C}$.

Soit $V \in \mathrm{Rep}_\Lambda(\mathscr{G}_K)$ où Λ est un anneau topologique contenant $\mathbf{Z}_p$ (compatible avec la topologie usuelle). Soit $\chi : \mathscr{G}_K \to \mathbf{Z}_p^\times$ un caractère continu. Notons $(g,v) \mapsto g(v)$ l'action de $\mathscr{G}_K$ sur V. On notera $V(\chi)$ la Λ-représentation de $\mathscr{G}_K$ sur le même espace donnée par $(g,v) \mapsto \chi(g) g(v)$.

Le module de Tate $\mathbf{Z}_p(1)$ est une $\mathbf{Z}_p$-représentation de $\mathscr{G}_K$. On notera $\mathbf{Z}_p(-1) = \mathbf{Z}_p(1)^\vee$ et $V(r) = V \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p(1)^{\otimes r}$, $V(-r) = V \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p(-1)^{\otimes r}$ pour $r \in \mathbb{N}$. En choisissant une $\mathbf{Z}_p$-base de $\mathbf{Z}_p(1)$, on obtient pour tout $r \in \mathbf{Z}$ un isomorphisme $V(r) \simeq V(\chi_{\mathrm{cyc}}^r)$ de Λ-représentations de $\mathscr{G}_K$.

2.2 Cohomologies continues

2.2.1. Ensemble de cohomologie. Soient G, M deux groupes topologiques tels que G agisse continûment sur M. On note M^G les invariants de M par G. Un *cocycle sur G à valeurs dans M* est une application continue $U : G \to M$ telle que $U_{\sigma\tau} = U_\sigma \sigma(U_\tau)$ quels que soient $\sigma, \tau \in G$. Deux cocycles U, U' sont dits *cohomologues* s'il existe $m \in M$ tel que $U'_\sigma = m^{-1} U_\sigma \sigma(m)$ pour tout $\sigma \in G$, ce qui définit une relation d'équivalence sur l'ensembles des cocycles. On note $H^1(G,M)$ l'ensemble des classes d'équivalence. C'est un ensemble pointé : la classe du cocycle trivial $g \mapsto 1$ est dite triviale. On appelle $H^1(G,M)$ *l'ensemble de cohomologie de G à valeurs dans M*.

Si M est abélien, alors $H^1(G,M)$ est muni d'une loi de groupe naturelle induite par celle sur M, dont la classe triviale est l'élément neutre. Si de plus M est une Λ-représentation linéaire de G, $H^1(G,M)$ est alors muni d'une structure naturelle de Λ-module induite par celle de M.

2.2.2 - Proposition. *Soient G un groupe topologique et Λ un G-anneau topologique. Il existe une bijection naturelle entre $H^1(G, \mathrm{GL}_d(\Lambda))$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme de Λ-représentations libres de rang d de G.*

Démonstration. Soit $M \in \mathrm{Rep}_\Lambda(G)$ de rang d. Fixons une Λ-base (ordonnée) $\mathbf{e}$ de M. La représentation ρ est continue Λ-semi-linéaire si et seulement si elle est donnée par $g(\mathbf{e}) = \mathbf{e} U_g$, où $U : G \to \mathrm{GL}_d(\Lambda)$, $g \mapsto U_g$ est une application continue qui vérifie la condition de cocycle

$$U_{gh} = U_g g(U_h)$$

pour tous $g, h \in G$. Dans une autre Λ-base, si l'on note $B \in \mathrm{GL}_d(\Lambda)$ la matrice de transformation, l'action est alors décrite par $U' : G \to \mathrm{GL}_d(\Lambda)$ avec

$$U'_g = B^{-1} U_g g(B).$$

Donc, deux Λ-représentations semi-linéaires de G sont équivalentes si et seulement s'il existe $B \in \mathrm{GL}_d(\Lambda)$ telle que leurs cocycles $U_1, U_2 : G \to \mathrm{GL}_d(\Lambda)$ soient conjugués par $U_{2,g} = B^{-1} U_{1,g} g(B)$. □

2.2.3. Groupes de cohomologie. Soient G un groupe topologique et M un G-module topologique. Pour $r \in \mathbb{N}$, une *r-cochaîne continue* est une application continue $G^r \to M$. On note $\mathscr{C}^r(G,M)$ l'ensemble des r-cochaînes, c'est un groupe abélien. Définissons l'application de cobord $\partial : \mathscr{C}^r(G,M) \to \mathscr{C}^{r+1}(G,M)$ par

$$\partial f(g_1,\ldots,g_{r+1}) = g_1\big(f(g_2,\ldots,g_{r+1})\big) + \sum_{i=1}^{r}(-1)^i f(g_1,\ldots,g_{i-1},g_i g_{i+1},g_{i+2},\ldots,g_{r+1}) + (-1)^{r+1} f(g_1,\ldots,g_r).$$

On vérifie que $\partial \circ \partial = 0$. On peut alors prendre les groupes de cohomologie du complexe $(\mathscr{C}^\bullet(G,M),\partial)$ (en posant $\mathscr{C}^r(G,M) = 0$ pour $r < 0$)

$$H^r(G,M) = \ker\big(\mathscr{C}^r(G,M) \xrightarrow{\partial} \mathscr{C}^{r+1}(G,M)\big) / \operatorname{Im}\big(\mathscr{C}^{r-1}(G,M) \xrightarrow{\partial} \mathscr{C}^r(G,M)\big).$$

Lorsque $r = 1$, cela coïncide avec l'ensemble de cohomologie défini précédemment. Si Λ est un anneau, que M est un Λ-module et que G agit Λ-linéairement sur M, les $H^r(G,M)$ deviennent naturellement des Λ^G-modules.

Pour une cochaîne $f : G^r \to M$, on pourra aussi écrire $f_{\ldots,g_i,\ldots} = f(\ldots,g_i,\ldots)$.

2.2.4 - Exemple. **Cohomologie d'un groupe procyclique.** Soit G un groupe topologique avec un générateur topologique γ. Soit M un G-module topologique. Alors $H^1(G,M)$ est un sous-groupe de $M/(\gamma-1)M$.

En effet, pour tout $f : G \to M$ un cocycle continu, on lui associe $f_\gamma \in M$. Si f est un cobord, alors $f_\gamma = \gamma(x) - x$ pour un $x \in M$. Inversement, si tel x existe, alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_{\gamma^n} = f_\gamma + \gamma(f_\gamma) + \cdots + \gamma^{n-1}(f_\gamma) = \gamma^n(x) - x$$

et $f_{\gamma^{-1}} = -\gamma^{-1}(f_\gamma) = \gamma^{-1}(x) - x$, donc aussi $f_{\gamma^{-n}} = \gamma^{-n}(x) - x$. Par densité et continuité, on obtient $f_\tau = \tau(x) - x$ pour tout $\tau \in G$, donc f est un cobord. On obtient alors un morphisme de groupes $H^1(G,M) \to M/(\gamma-1)M$ bien défini qui est injectif.

2.2.5 - Exemple. **Cohomologie d'un groupe fini.** Soit G un groupe fini (discret). Soit M un G-module topologique. Un cocycle $G \to M$ est automatiquement continu. Donc $H^i(G,M) = H^i_d(G,M)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, où cette dernière est définie en regardant M comme un G-module discret.

Par un résultat classique [GS06, 3.3.8], les groupes $H^i_d(G,M)$, $i \geq 1$ sont de n-torsion où n est le cardinal de G. Par conséquent, si de plus M est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel et que l'action de G sur M est $\mathbf{Q}$-linéaire, alors $H^i(G,M) = 0$ pour $i \geq 1$.

2.2.6 - Proposition. *Soit G un groupe topologique. Soit $1 \to A \to B \to C \to 1$ une suite exacte courte de groupes topologiques munis d'une action de G. Alors on a une suite exacte d'ensembles pointés*

$$0 \to A^G \to B^G \to C^G \xrightarrow{\delta} H^1(G,A) \to H^1(G,B) \to H^1(G,C).$$

L'application δ est définie comme suit : soit $c \in C$ et soit $b \in B$ un relèvement de c ; alors $g \mapsto b^{-1}g(b)$ est un cocycle $G \to B$ dont l'image par $B \to C$ est triviale, donc contenue dans A ; il définit alors un cocycle continu $G \to A$, donc une classe dans $H^1(G,A)$; c'est indépendant du choix du relèvement b.

2.2.7. Soient G et M deux groupes topologiques, G agissant continûment sur M. Soit H un sous-groupe fermé distingué de G. On dispose d'une application de restriction res : $H^1(G,M) \to H^1(H,M)$ induite par restriction d'un cocycle $G \to M$ à H. On dispose aussi d'une application d'inflation infl : $H^1(G/H,M^H) \to H^1(G,M)$ définie par composition avec $G \to G/H$. Lorsque M est abélien, on peut de même définir res : $H^r(G,M) \to H^r(H,M)$ et infl : $H^r(G/H,M^H) \to H^r(G,M)$ pour $r > 1$.

On a une action de G sur l'ensemble $H^1(H,M)$ par $g(c)_h = g(c_{g^{-1}hg})$ pour $g \in G$, $h \in H$. Cette action est triviale sur H, donc se factorise via G/H.

2.2.8 - Proposition. *(i) On a une suite exacte d'inflation-restriction*

$$0 \to H^1(G/H,M^H) \xrightarrow{\text{infl}} H^1(G,M) \xrightarrow{\text{res}} H^1(H,M).$$

(ii) Lorsque les topologies sur G et M sont discrètes et M est abélien, il existe un morphisme naturel τ : $H^1(H,M) \to H^2(G/H,M^H)$ tel que l'on ait une suite exacte longue

$$0 \to H^1(G/H,M^H) \xrightarrow{\text{infl}} H^1(G,M) \xrightarrow{\text{res}} H^1(H,M)^{G/H} \xrightarrow{\tau} H^2(G/H,M^H) \xrightarrow{\text{infl}} H^2(G,M).$$

Le (ii) reste valable si G et M ne sont plus nécessairement discrets tant que H est un sous-groupe ouvert de G ; si de plus M est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel et si l'action de G est $\mathbf{Q}$-linéaire, on a $H^1(G,M) \simeq H^1(H,M)^{G/H}$, compte tenu de (2.2.5).

2.3 Descente galoisienne (classique)

2.3.1 - Lemme (Speiser, [GS06, 2.3.8]). *Soit L/K une extension galoisienne finie de groupe de Galois G. Soit V un L-espace vectoriel muni d'une G-action semi-linéaire. Alors l'application naturelle G-équivariante $L \otimes_K V^G \to V$ est bijective.*

2.3.2 - Théorème (Hilbert 90). *Soit L/K une extension galoisienne. On munit L de la topologie discrète. Alors on a*

(i) $H^1(\mathrm{Gal}(L/K), \mathrm{GL}_d(L)) = \{1\}$,
(ii) $H^1(\mathrm{Gal}(L/K), L) = 0$.

Démonstration. (i) On a $H^1\big(\mathrm{Gal}(L/K), \mathrm{GL}_d(L)\big) = \varinjlim_F H^1\big(\mathrm{Gal}(F/K), \mathrm{GL}_d(F)\big)$ où F parcourt les sous-extensions galoisiennes finies de L/K. On a $H^1\big(\mathrm{Gal}(F/K), \mathrm{GL}_d(F)\big) = \{1\}$ par (2.3.1) et (2.2.2).

(ii) Soit $c : \mathrm{Gal}(L/K) \to L$ un cocycle continu, alors on obtient un cocycle continu

$$U : \mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{GL}_2(L), \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & c_g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il existe alors $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_d(L)$ telle que pour tout $g \in G$ on a $U_g = A^{-1} g(A)$, ou de même

$$\begin{pmatrix} g(a_{11}) & g(a_{12}) \\ g(a_{21}) & g(a_{22}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} U_g = \begin{pmatrix} a_{11} & c_g a_{11} + a_{12} \\ a_{21} & c_g a_{21} + a_{22} \end{pmatrix}.$$

Donc a_{11}, $a_{21} \in K$ et ils ne s'annulent pas tous. Si $a_{i1} \neq 0$, on aura $c_g = g(a_{i2}/a_{i1}) - a_{i2}/a_{i1}$ pour tout $g \in G$, c'est-à-dire que c est un cocycle trivial. □

2.3.3 - Corollaire. *Soit K une extension algébrique de $\mathbf{Q}_p$ et soit L/K une extension galoisienne finie, alors $H^1(\mathrm{Gal}(L/K), \mathrm{GL}_d(\widehat{L})) = \{1\}$.*

Démonstration. On a $\widehat{L} = L\widehat{K}$. C'est une extension galoisienne finie de $\widehat{K}$. Pour appliquer (2.3.2), il suffit alors de remarquer que l'action de $\mathrm{Gal}(L/K)$ sur $\mathrm{GL}_d(\widehat{L})$ coïncide avec celle de $\mathrm{Gal}(\widehat{L}/\widehat{K})$, ce dernier groupe étant identifié au premier par restriction à L. □

2.4 Descente non ramifiée

Soit $K/\mathbf{Q}_p$ une extension finie.

2.4.1 - Proposition. *Soit L/K une extension non ramifiée.*

(i) On a $H^1(\mathrm{Gal}(L/K), \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{L}})) = \{1\}$ et $H^1(\mathrm{Gal}(L/K), \mathrm{GL}_d(\widehat{L})) = \{1\}$.
(ii) Une $\mathbf{C}$-représentation de $\mathscr{G}_K$ est triviale si et seulement si sa restriction à I_K est triviale.

Démonstration. (i.a) Montrons d'abord $H^1(\mathrm{Gal}(K^{unr}/K), \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K^{unr}}})) = 1$. Soit $U : \mathrm{Gal}(K^{unr}/K) \to \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K^{unr}}})$ un cocycle continu. Soit k le corps résiduel de K et soit $q = \#k$. Rappelons que l'on a un isomorphisme naturel $\mathrm{Gal}(K^{unr}/K) \simeq \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \simeq \widehat{\mathbf{Z}}$ et que $\mathrm{Gal}(K^{unr}/K)$ admet pour générateur topologique le Frobenius ϕ_q dont l'action sur $\overline{k}$ est donnée par $x \mapsto x^q$. Alors, par continuité, pour montrer que U est un cobord, il suffit de trouver une matrice $M \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K^{unr}}})$ telle que $U_{\phi_q} = M^{-1}\phi_q(M)$.

Montrons par récurrence que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, il existe $M_i \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K^{unr}}})$ telle que

$$U_{\phi_q} \equiv M_i^{-1}\phi_q(M_i) \bmod \mathfrak{m}^i_{\widehat{K^{unr}}} \tag{2.4.1.1}$$

et que de plus, on peut les arranger pour que $(M_i)_i$ converge vers une matrice inversible.

Commençons par le cas $i = 1$. La continuité de U montre que $U \bmod \mathfrak{m}_{\widehat{K^{unr}}}$ est continue pour la topologie discrète sur $\mathrm{GL}_d(\overline{k})$. On déduit alors de la descente galoisienne classique (2.3.2) qu'il existe $M_1 \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K^{unr}}})$ vérifiant (2.4.1.1) pour $i = 1$.

Supposons que (2.4.1.1) soit vérifiée pour un certain $i \in \mathbb{N}^*$. On se propose de trouver $X_i \in \mathrm{Mat}(\mathcal{O}_{\widehat{K^{unr}}})$ telle que (2.4.1.1) soit vérifiée pour $i+1$ avec

$$M_{i+1} = (1 + \pi^i X_i)M_i \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K^{unr}}}). \tag{2.4.1.2}$$

Cela étant fait, la suite $(M_i)_i$ ainsi construite à partir de M_1 vérifiera les propriétés voulues : si on note $M = \lim_i M_i \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K^{unr}}})$, la congruence (2.4.1.1) passée à la limite donnera $U_{\phi_q} = M^{-1}\phi_q(M)$.

En insérant (2.4.1.2) dans l'identité voulue (2.4.1.1), on a

$$U_{\phi_q} \equiv M_i^{-1}(1 - \pi^i X_i + \pi^i \phi_q(X_i))\phi_q(M_i) \bmod \mathfrak{m}_{\widehat{K^{unr}}}^{i+1}.$$

Donc on veut avoir

$$\phi_q(X_i) - X_i \equiv \pi^{-i}(M_i U_{\phi_q}\phi_q(M_i)^{-1} - 1) \bmod \mathfrak{m}_{\widehat{K^{unr}}}.$$

Ici, la partie à droite appartient bien à $\mathrm{Mat}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K^{unr}}})$ par l'hypothèse de récurrence. Cette équation revient à une équation dans $\mathrm{Mat}_d(\overline{k})$, qui admet une solution puisque l'application $\phi_q - \mathrm{id} : \overline{k} \to \overline{k}$ est surjective. Ainsi, on a montré l'existence de X_i.

(i.b) Traitons alors $H^1(\mathrm{Gal}(K^{unr}/K), \mathrm{GL}_d(\widehat{K^{unr}}))$. Soit $U : \mathrm{Gal}(K^{unr}/K) \to \mathrm{GL}_d(\widehat{K^{unr}})$ un cocycle continu. Il existe un sous-groupe ouvert distingué H de $\mathrm{Gal}(K^{unr}/K)$ tel que $U_h \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K^{unr}}})$ pour tout $h \in H$. Alors $K' = (K^{unr})^H$ est une extension galoisienne finie de K, et U restreint à $H = \mathrm{Gal}(K^{unr}/K')$ est un cobord selon (i.a).

Par dévissage (2.2.8)

$$1 \to H^1(\mathrm{Gal}(K'/K), \mathrm{GL}_d(K')) \to H^1(\mathrm{Gal}(K^{unr}/K), \mathrm{GL}_d(\widehat{K^{unr}})) \to H^1(\mathrm{Gal}(K^{unr}/K'), \mathrm{GL}_d(\widehat{K^{unr}}))$$

et selon (2.3.2), U lui-même est aussi un cobord.

(i.c) Si L/K est une extension non ramifiée (donc galoisienne). On a $L \subset K^{unr}$. Comme les applications d'inflation $H^1(\mathrm{Gal}(L/K), \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{L}})) \to H^1(\mathrm{Gal}(K^{unr}/K), \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K^{unr}}}))$ et $H^1(\mathrm{Gal}(L/K), \mathrm{GL}_d(\widehat{L})) \to H^1(\mathrm{Gal}(K^{unr}/K), \mathrm{GL}_d(\widehat{K^{unr}}))$ sont injectives, on obtient les trivialités voulues par (i.a) et (i.b).

Le (ii) résulte de la suite exacte (2.2.8)

$$1 \to H^1(\mathrm{Gal}(K^{unr}/K), \mathrm{GL}_d(\widehat{K^{unr}})) \to H^1(\mathscr{G}_K, \mathrm{GL}_d(\mathbf{C})) \to H^1(I_K, \mathrm{GL}_d(\mathbf{C}))$$

(où l'on a appliqué (3.1.1), qui reste à voir plus tard) combinée avec (i.b). □

2.4.2. Soit L/K une extension algébrique. On dit que L/K est *finiment ramifiée* si $e(L/K)$ est fini. Une extension galoisienne L/K est finiment ramifiée si et seulement si l'image de l'inertie I_K dans $\mathrm{Gal}(L/K)$ est finie, ce qui revient au même que l'extension galoisienne $L/L \cap K^{unr}$ est finie.

2.4.3 - Corollaire. *Si L/K est galoisienne finiment ramifiée, on a* $H^1(\mathrm{Gal}(L/K), \mathrm{GL}_d(\widehat{L})) = \{1\}$.

Démonstration. Posons $L_0 = L \cap K^{unr}$. L'extension $\widehat{L} = \widehat{L_0}L$ de $\widehat{L_0}$ est galoisienne finie de groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L/L_0)$. Considérons la suite exacte (2.2.8)

$$1 \to H^1(\mathrm{Gal}(L_0/K), \mathrm{GL}_d(\widehat{L_0})) \to H^1(\mathrm{Gal}(L/K), \mathrm{GL}_d(\widehat{L})) \to H^1(\mathrm{Gal}(L/L_0), \mathrm{GL}_d(\widehat{L})).$$

Les deux termes à gauche et à droite sont triviaux grâce à (2.3.2) et (2.4.1). □

2.5 Représentations B-admissibles

2.5.1. Soient G un groupe topologique et $\mathbf{B}$ un G-anneau topologique. On dit (suivant Fontaine) qu'une représentation $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{B}}(G)$ est $\mathbf{B}$-*admissible* si elle est une $\mathbf{B}$-représentation triviale de G, c'est-à-dire $V \simeq \mathbf{B}^d$ muni de l'action naturelle de G.

Supposons que $E = \mathbf{B}^G$ soit un corps. Soit $F \subset E$ un sous-corps fermé. On dit qu'une représentation $V \in \mathrm{Rep}_F(G)$ est $\mathbf{B}$-*admissible* si $\mathbf{B} \otimes_F V \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{B}}(G)$ est $\mathbf{B}$-admissible.

On dit que l'anneau $\mathbf{B}$ est (F, G)-*régulier* s'il vérifie les conditions suivantes :

(Per1) $\mathbf{B}$ est un anneau intègre ;

(Per2) $\mathbf{B}^G = (\mathrm{Frac}\,\mathbf{B})^G$;

(Per3) si $b \in \mathbf{B}\backslash\{0\}$ vérifie $g(Fb) = Fb$ pour tout $g \in G$, alors $b \in \mathbf{B}^\times$.

En particulier, si $\mathbf{B}$ est un corps, $\mathbf{B}$ est (F, G)-régulier. Un anneau (F, G)-régulier est aussi (F_0, G)-régulier pour $F_0 \subset F$ sous-corps fermé.

2.5.2 - Exemple. Soit $K/\mathbf{Q}_p$ une extension finie.

(i) Le corps $\mathbf{C}$ muni de la topologie naturelle est un anneau $(K, \mathscr{G}_K)$-régulier, ce qui permet de définir la notion de *représentation* $\mathbf{C}$-*admissible.*

Par la descente finiment ramifiée (2.4.3) et (2.2.2), on obtient que si $\rho : \mathscr{G}_K \to \mathrm{GL}_{\mathbf{Q}_p}(V)$ est une $\mathbf{Q}_p$-représentation linéaire de $\mathscr{G}_K$ telle que $\rho(I_K)$ soit fini, alors V est $\mathbf{C}$-admissible.

(ii) Le corps $\overline{\mathbf{Q}_p}$ muni de la topologie naturelle est un anneau $(K,\mathscr{G}_K)$-régulier, ce qui permet de définir la notion de *représentation* $\overline{\mathbf{Q}_p}$*-admissible.*

Soit $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathscr{G}_K)$. Si V est $\overline{\mathbf{Q}_p}$-admissible, comme $\overline{\mathbf{Q}_p}$ est une représentation lisse de $\mathscr{G}_K$ (le stabilisateur de tout $x \in \overline{\mathbf{Q}_p}$ est ouvert dans $\mathscr{G}_K$), il existe une extension finie L/K telle que la $\mathbf{Q}_p$-représentation $V|_{\mathscr{G}_L}$ est triviale. Inversement, si tel L existe, alors $V|_{\mathscr{G}_L}$ est évidemment $\overline{\mathbf{Q}_p}$-admissible, il en est de même pour V par la descente galoisienne classique (2.3.2).

(iii) Notons $\mathbf{B}_{\mathrm{HT}} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathbf{C}(n)$, c'est un anneau gradué. On le munit de la topologie somme directe induite par la topologie naturelle sur $\mathbf{C}$. L'action naturelle de $\mathscr{G}_K$ préserve les composantes $\mathbf{C}(n)$. Le choix d'une $\mathbf{Z}_p$-base de $\mathbf{Z}_p(1)$ fournit un isomorphisme $\mathscr{G}_K$-équivariant d'anneaux topologiques

$$\mathbf{B}_{\mathrm{HT}} \simeq \mathbf{C}[t,t^{-1}]$$

où l'action de $\sigma \in \mathscr{G}_K$ est donnée par $\sum_i a_i t^i \mapsto \sum_i g(a_i)\chi_{\mathrm{cyc}}(g)^i t^i$.

L'anneau intègre $\mathbf{C}[t,t^{-1}]$ est $(K,\mathscr{G}_K)$-régulier (donc aussi $\mathbf{B}_{\mathrm{HT}}$), ce qui permet de définir la notion de *représentation de Hodge-Tate.* En effet, pour (Per2), en utilisant l'inclusion $\mathscr{G}_K$-équivariante $\mathbf{C}(t) \hookrightarrow \mathbf{C}(\!(t)\!)$ et $\mathbf{C}^{\mathscr{G}_K} = 0$, et $\mathbf{C}(n)^{\mathscr{G}_K} = K$ si $n \neq 0$ (3.2.1) que l'on verra, on obtient $\mathbf{C}(t)^{\mathscr{G}_K} = K = \mathbf{C}[t,t^{-1}]^{\mathscr{G}_K}$. Montrons (Per3). Si $b = \sum_i a_i t^i \in \mathbf{C}[t,t^{-1}]$ est non nul et $\sigma(Kb) = Kb$ pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_K$, l'action de $\mathscr{G}_K$ sur le K-sous-espace $Kb \neq 0$ est donné par un caractère $\eta : \mathscr{G}_K \to K^\times$. On a pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_K$

$$\begin{gathered}\textstyle\sum_i \sigma(a_i)\chi_{\mathrm{cyc}}(\sigma)^i t^i = \sigma(\sum_i a_i t^i) = \sum_i \eta(\sigma)a_i t^i \\ \sigma(a_i)\chi_{\mathrm{cyc}}(\sigma)^i = \eta(\sigma)a_i, \quad \forall i \in \mathbf{Z}.\end{gathered}$$

S'il existe $i \neq j$ tels que a_i, a_j sont non nuls, on a $\sigma(a_i/a_j)\chi_{\mathrm{cyc}}(\sigma)^{i-j} = a_i/a_j$ pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_K$, contredisant $\mathbf{C}(i-j)^{\mathscr{G}_K} = 0$ (3.2.1). Donc b est de la forme $a_i t^i$, qui est inversible dans $\mathbf{C}[t,t^{-1}]$.

Une représentation $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathscr{G}_K)$ de dimension d est de Hodge-Tate si et seulement si l'application naturelle $\mathbf{C}$-linéaire $\mathscr{G}_K$-équivariante

$$\bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} \mathbf{C}(i) \otimes_K (\mathbf{C}(-i) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K} \to \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$$

est bijective, ou bien que

$$\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \simeq \bigoplus_{i=1}^{d} \mathbf{C}(n_i)$$

où $d = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$, $n_1,\ldots,n_d \in \mathbf{Z}$. Les entiers n_i sont uniquement déterminés à une permutation près, on les appelle les *poids de Hodge-Tate de* V.

2.5.3. Soit $\mathbf{B}$ un anneau (F,G)-régulier. Pour $V \in \mathrm{Rep}_F(G)$, posons $D_{\mathbf{B}}(V) = (\mathbf{B} \otimes_F V)^G$, c'est un $E(=\mathbf{B}^G)$-espace vectoriel. On a une application (des périodes) naturelle $\mathbf{B}$-linéaire et G-équivariante

$$\alpha_V : \mathbf{B} \otimes_E D_{\mathbf{B}}(V) \to \mathbf{B} \otimes_F V$$

donnée par l'inclusion $D_{\mathbf{B}}(V) \subset \mathbf{B} \otimes_F V$, l'associativité de $\otimes$ et la multiplication dans $\mathbf{B}$.

2.5.4 - Proposition. *Soit $V \in \mathrm{Rep}_F(G)$. Alors l'application des périodes α_V est injective et on a $\dim_E D_{\mathbf{B}}(V) \leq \dim_F V$. De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) α_V est bijective;

(ii) $\dim_E D_{\mathbf{B}}(V) = \dim_F V$;

(iii) V est $\mathbf{B}$-admissible.

Démonstration. Si $\ker\alpha_V \neq 0$, soit x un élément non nul de $\ker\alpha_V$ avec l'écriture $x = x_1\otimes v_1+\cdots+x_r\otimes v_r \in \ker\alpha_V$ telle que la longueur $r(\neq 0)$ soit minimale. On a $x_1 \neq 0$. Par la $\mathbf{B}$-linéarité et la G-équivariance de α_V, $x_1 g(x) - g(x_1)x$ appartient à $\ker\alpha$ pour tout $g \in G$, c'est une écriture de longueur plus petite. On a donc $x_1 g(x) = g(x_1)x$ pour tout $g \in G$. Ainsi $x_1^{-1}x \in (\mathrm{Frac}\,\mathbf{B} \otimes_E D_{\mathbf{B}}(V))^G = (\mathrm{Frac}\,\mathbf{B})^G \otimes_E D_{\mathbf{B}}(V) = D_{\mathbf{B}}(V)$ par (Per2). On peut donc écrire $x = x_1 \otimes v_1$. Comme $\alpha_V(x) = x_1 v_1 = 0 \in \mathbf{B} \otimes_F V$, on obtient $v_1 = 0$, puisque V est un F-espace vectoriel de dimension finie et $\mathbf{B}$ est un anneau intègre par (Per1). Donc $x = 0$, absurde. Donc α_V est injective.

On a évidemment (i)⇒(iii)⇒(ii). Montrons (ii)⇒(i). Notons d la dimension dans (ii). Par l'injectivité de α_V et (ii), α_V induit par extension des scalaires une application Frac $\mathbf{B}$-linéaire G-équivariante bijective $(\operatorname{Frac}\mathbf{B})\otimes_E D_{\mathbf{B}}(V) \to (\operatorname{Frac}\mathbf{B})\otimes_F V$. Soient $\mathbf{e}$ une E-base de $D_{\mathbf{B}}(V)$ et $\mathbf{f}$ une F-base de V. Soit $A \in \mathrm{Mat}_d(\mathbf{B}) \cap \mathrm{GL}_d(\operatorname{Frac}\mathbf{B})$ la matrice de α_V associée. On a

$$\alpha_V(\mathbf{e}) = \mathbf{f}\cdot A.$$

D'autre part, comme $\mathbf{e}$ est fixée par G, on a

$$\alpha_V(\mathbf{e}) = \alpha_V \circ g(\mathbf{e}) = g\circ \alpha_V(\mathbf{e}) = g(\mathbf{f}\cdot A) = g(\mathbf{f})\cdot g(A)$$

pour tout $g \in G$. Si on note $M_g \in \mathrm{GL}_d(F)$ la matrice de l'action de g, on a $A = M_g g(A)$. En prenant le déterminant, on obtient $F\det A = F g(\det A) \neq 0$ pour $g \in G$. Donc $\det A \in \mathbf{B}^\times$ par (Per3), puis $A \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B})$ par la formule de Cramer. Ainsi, α_V est un $\mathbf{B}$-isomorphisme. □

2.5.5 - Théorème. *Soit $K/\mathbf{Q}_p$ une extension galoisienne finie et $\mathcal{F}$ un groupe de Lubin-Tate sur $\mathcal{O}_K$. La $\mathbf{Q}_p$-représentation $V_p\mathcal{F} = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T_\pi\mathcal{F}$ de $\mathscr{G}_K$ est de Hodge-Tate avec les poids de Hodge-Tate* $0,\ldots,0,1$.

Tate [Tat67] a en fait montré la décomposition $\mathscr{G}_K$-équivariante

$$\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{Q}_p} V_p\mathcal{F} \simeq \mathbf{C}\otimes_K \mathrm{Hom}_K(\omega_{\mathcal{F}^\vee},K) \bigoplus \mathbf{C}(1)\otimes_K \omega_{\mathcal{F}} \tag{2.5.5.1}$$

où $\mathscr{G}_K$ agit trivialement sur les espaces tangents $\omega_{\mathcal{F}}$, $\omega_{\mathcal{F}^\vee}$, qui sont de K-dimension 1 et $h-1$ où $h = [K:\mathbf{Q}_p]$ est la hauteur de $\mathcal{F}$.

Par ailleurs, $\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{Q}_p} V_p\mathcal{F}$ se décompose de manière $\mathscr{G}_K$-équivariante en somme directe de

$$W_\sigma = \{w \in \mathbf{C}\otimes_{\mathbf{Q}_p} V_p(\mathcal{F})\} : (1\otimes x)(w) = \sigma(w), \forall x \in K\}, \quad \sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p),$$

chaque W_σ étant isomorphe à $\mathbf{C}(\sigma\circ\chi_\pi)$. On en déduit que l'une et une seule parmi elles est isomorphe à $\mathbf{C}(1)$, et que les autres sont $\mathbf{C}$-admissibles. Il se trouve que $\mathbf{C}(\chi_\pi) \simeq \mathbf{C}(1)$, car la multiplication par $1\otimes x$ devient via la décomposition (2.5.5.1) l'identité sur $\mathbf{C}(1)\otimes_K \omega_{\mathcal{F}}$ [Ser97, Chap. III, Appx.] (voir aussi (4.2.6)). Donc, on obtient

$$\mathbf{C}(\sigma\circ\chi_\pi) \simeq \begin{cases} \mathbf{C}(\chi_{\mathrm{cyc}}) & \sigma = \mathrm{id} \\ \mathbf{C} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.5.5.2}$$

Si $[K:\mathbf{Q}_p] \geq 2$, ces isomorphismes n'existent pas si on remplace $\mathbf{C}$ par $\overline{\mathbf{Q}_p}$. En effet, dans le cas contraire, (2.5.2, ii) implique que $\sigma\circ\chi_\pi$ et χ_{cyc} seraient égaux sur un sous-groupe ouvert de $\mathscr{G}_K$; mais $\mathrm{Im}(\sigma\circ\chi_\pi)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_K \simeq \mathbf{Z}_p^{[K:\mathbf{Q}_p]}$ au voisinage de 1, alors que $\mathrm{Im}(\chi_{\mathrm{cyc}})$ est isomorphe à $\mathbf{Z}_p$ au voisinage de 1 (autrement dit, ils sont des groupes de Lie p-adiques de dimensions différentes) ; c'est absurde.

3 Théorie de Sen-Tate

Soit $K/\mathbf{Q}_p$ une extension finie. Soit $\chi : \mathscr{G}_K \to \mathcal{O}_K^\times$ un caractère continu infiniment ramifié dont l'image contient un sous-groupe ouvert isomorphe à $\mathbf{Z}_p$. Soit K_∞ l'extension de K découpée par χ (1.4.3, i) et fixons les notations Γ_K, Γ_n, K_n et γ_n comme dans (1.8.1).

Pour un entier $d > 0$, on définit une valuation sur $\mathrm{Mat}_d(\mathbf{C})$ par $v_p((a_{ij})_{i,j}) = \min_{i,j} v_p(a_{ij})$. On a $v_p(A+B) \geq \min\{v_p(A), v_p(B)\}$ et $v_p(AB) \geq v_p(A)+v_p(B)$ pour des matrices $A, B \in \mathrm{Mat}_d(\mathbf{C})$. L'action naturelle de $\mathscr{G}_{K_\infty}$ sur $\mathrm{Mat}_d(\mathbf{C})$ préserve cette valuation.

3.1 Théorème d'Ax-Sen-Tate

3.1.1 - Théorème (Ax-Sen-Tate). *Soit K une extension algébrique de $\mathbf{Q}_p$. Alors on a $\widehat{K} = \mathbf{C}^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)}$. Plus précisément, soit $\alpha \in \mathbf{C}$ et posons $\Delta_K(\alpha) = \inf_{\sigma\in\mathscr{G}_K} v_p(\sigma(\alpha)-\alpha)$ (qui pourrait valoir $+\infty$), alors il existe $x \in \widehat{K}$ tel que $v_p(\alpha - x) \geq \Delta_K(\alpha) - p/(p-1)^2$.*

Démonstration. Remarquons que $\Delta_K(\alpha) \geq v_p(\alpha)$ et que $\Delta_K(\alpha)$ vérifie l'inégalité ultramétrique. Soit $r \in \mathbf{R}$ tel que $r \leq \Delta_K(\alpha)$. Par densité, il existe $c_r \in \overline{\mathbf{Q}_p}$ tel que $v_p(\alpha - c_r) \geq r$, alors $\Delta_K(c_r) \geq \min\{r, \Delta_K(\alpha)\} = r$. S'il existe $x_r \in K$ vérifiant $v_p(c_r - x) \geq r - p/(p-1)^2$, alors on aura $v_p(\alpha - x_r) \geq r - p/(p-1)^2$. Lorsque r tend vers $\Delta_K(\alpha)$, $(x_r)_r$ admet une limite $x \in \widehat{K}$ qui vérifie $v_p(\alpha - x) \geq \Delta_K(\alpha) - p/(p-1)^2$. On est donc ramené au cas $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}_p}$, qui résultera du lemme suivant. □

3.1.2 - Lemme. *Soit $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}_p}$. Il existe $x \in K$ tel que $v_p(\alpha - x) \geq \Delta_K(\alpha) - p/(p-1)^2$.*

3.1.2.1 - Lemme. *Soit $s \in \mathbb{N}$ et soit $d \geq 2$ un entier premier à p. On a $v_p\left(\binom{p^s d}{p^s}\right) = v_p(d)$.*

Démonstration. En utilisant la formule $\binom{p^s d}{p^s} = \prod_{i=1}^{x} \frac{p^s d - i + 1}{i}$ et en notant que $v_p(p^s d - i + 1) = v_p(i-1)$, $2 \leq i \leq p^s$ par l'inégalité ultramétrique, on obtient $v_p\left(\binom{p^s d}{p^s}\right) = v(p^s d) - v(p^s) = v_p(d)$. □

3.1.2.2 - Lemme. *Soit $P(X) \in \overline{\mathbf{Q}_p}[X]$ un polynôme de degré n dont on note c le minimum de la valuation p-adique des racines. Si $n = p^s d$ avec $d \geq 2$ un entier et si on pose $q = p^s$, alors $P^{(q)}(X)$ a une racine β qui vérifie $v_p(\beta) \geq c - \frac{1}{n-q} v_p(d)$.*

Démonstration. On peut supposer P unitaire. En écrivant $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ (avec $a_n = 1$) et puis par la formule de Viète, le produit des $n - q$ racines de $P^{(q)}(X)$ est $(-1)^{n-q} a_q / \binom{n}{q}$ et on a $v_p(a_q) \geq (n-q)c$. Il existe donc une racine β de $P^{(q)}(X)$ qui vérifie $(n-q)v_p(\beta) \geq (n-q)c - v_p\left(\binom{n}{q}\right)$. On conclut par le lemme précédent. □

Démonstration de (3.1.2). Notons $P_{\min,\alpha}(X)$ le polynôme minimal de α sur K. Montrons par récurrence sur $n = [K(\alpha) : K] = \deg P_{\min,\alpha}$ qu'il existe $x \in K$ tel que

$$v_p(\alpha - x) \geq \Delta_K(\alpha) - \sum_{i=0}^{s} \frac{1}{p^i(p-1)}$$

où p^{s+1} est la plus grande puissance de p inférieure à n.

Appliquons (3.1.2.2) à $P(X) = P_{\min,\alpha}(X + \alpha) \in \overline{\mathbf{Q}_p}[X]$ (et alors $c = \Delta_K(\alpha)$). Écrivons $n = p^s d$ avec ou bien $d \geq 2$ un entier premier à p, ou bien $d = p$. Prenons $q = p^s$. Alors $P^{(q)}(X)$ a une racine β qui vérifie $v_p(\beta) \geq c - \frac{1}{n-q} v_p(d)$. Posons $\alpha' = \beta + \alpha$, qui est une racine du polynôme $P_{\min,\alpha}^{(q)}(X) \in K[X]$. Alors on a $\Delta_K(\alpha') \geq \min\{\Delta_K(\alpha), v_p(\beta)\} \geq c - \frac{1}{n-q} v_p(d)$. Soit $s' \in \mathbb{N}$ tel que $p^{s'+1}$ soit la plus grande puissance de p inférieure à $[K(\alpha') : K] (\leq n - q)$. Alors $s' = s - 1$ si $d = p$, et $s' = s$ si $d \geq 2$ est premier à p. On en conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à α'. □

3.2 Énoncés des théorèmes principaux

3.2.1 - Théorème (Tate). *Soit $\eta : \mathscr{G}_K \to \mathcal{O}_K^\times$ un caractère continu dont l'image contient un sous-groupe ouvert isomorphe à $\mathbf{Z}_p$.*

(i) Si $\eta(I_K)$ est fini, on a $\mathbf{C}(\eta)^{\mathscr{G}_K} = K$, et $H^1(\mathscr{G}_K, \mathbf{C}(\eta))$ est un K-espace vectoriel de dimension 1 engendré par la classe de $\log \chi$.

(ii) Si $\eta(I_K)$ est infini, on a $\mathbf{C}(\eta)^{\mathscr{G}_K} = 0$ et $H^1(\mathscr{G}_K, \mathbf{C}(\eta)) = 0$.

En particulier, on a $\mathbf{C}^{\mathscr{G}_K} = K$, $H^1(\mathscr{G}_K, \mathbf{C}) = K[\log \chi_{cyc}]$ et $\mathbf{C}(r)^{\mathscr{G}_K} = 0$, $H^1(\mathscr{G}_K, \mathbf{C}(r)) = 0$ si $r \neq 0$.

3.2.2. Soit $W \in \mathrm{Rep}_{\widehat{K_\infty}}(\Gamma_K)$. Un élément $w \in W$ est dit *K-fini* si son orbite engendre un K-sous-espace vectoriel de dimension finie de W. On notera $W^{K-\mathrm{f}}$ (ou W^{f}) l'ensemble des vecteurs K-finis de W. C'est un K_∞-sous-espace vectoriel de W insensible au changement de K par une extension finie contenue dans K_∞.

De façon similaire, soit $W \in \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_{\widehat{K_\infty}}}(\Gamma_K)$, un élément $w \in W$ est dit *$\mathcal{O}_K$-fini* si son orbite engendre un $\mathcal{O}_K$-sous-module de type fini de W. On notera $W^{\mathcal{O}_K-\mathrm{f}}$ (ou simplement W^{f}) l'ensemble des éléments $\mathcal{O}_K$-finis dans W.

3.2.3 - Théorème. *On a $\widehat{K_\infty}^{\mathrm{f}} = K_\infty$.*

3.2.4 - Remarque. En revanche, si L/K est une extension galosienne telle que $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ soit un groupe de Lie p-adique avec soit $\dim G \geq 2$ soit $\dim G/I \geq 1$ où I est le groupe d'inertie de G, alors il existe un $\mathbf{Q}_p$-sous-espace de $\widehat{L}$ de dimension finie stable par G qui n'est pourtant pas contenu dans $\overline{K}$ [Sen80, Prop. 11].

Expliquons-le dans le cas où $[K : \mathbf{Q}_p] \geq 2$ et où $L = K_\infty^\pi$ est découpée par le caractère de Lubin-Tate $\chi_\pi : \mathscr{G}_K \to \mathcal{O}_K^\times$ avec π une uniformisante de K. Ce caractère étant surjectif, il existe une sous-extension finie K' de L/K telle que $\mathrm{Gal}(L/K') \overset{\chi_\pi}{\simeq} 1 + \mathfrak{m}_K^t \overset{\log}{\simeq} \mathfrak{m}_K^t \simeq \mathcal{O}_K \simeq \mathbf{Z}_p^{[K:\mathbf{Q}_p]}$ avec t suffisamment grand. Donc $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ est un groupe de Lie p-adique de dimension $[K : \mathbf{Q}_p] \geq 2$.

Ces isomorphismes donnent deux caractères additifs $\alpha_1, \alpha_2 : \mathscr{G}_K \to \mathbf{Z}_p$; ils sont $\mathbf{Z}_p$-linéairement indépendant même si restreints à un sous-groupe ouvert ; ils sont infiniment ramifiés car L/K est totalement ramifiée.

Vus comme des cocycles $\mathscr{G}_{K'} \to \mathbf{C}$, α_1 et α_2 définissent deux éléments non nuls de $H^1(\mathscr{G}_{K'}, \mathbf{C}) \simeq K$ (3.2.1). Il existe $\theta \in K'^{\times}$, $c \in \mathbf{C}$ tels que

$$\theta \cdot \alpha_1(\sigma) - \alpha_2(\sigma) = \sigma(c) - c \tag{3.2.4.1}$$

pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_{K'}$. La trivialité de α_1, α_2 sur $\mathscr{G}_L$ implique que $c \in \mathbf{C}^{\mathscr{G}_L} = \widehat{L}$.

Vérifions que le $\mathbf{Q}_p$-espace $V = \mathbf{Q}_p \langle 1, \theta, c \rangle$ convient. Il suffit de montrer que $c \notin L (= \widehat{L} \cap \overline{K})$. Sinon, il existerait une sous-extension finie K'' de L/K' contenant c. Par (3.2.4.1), on aurait $\theta \in \mathbf{Q}_p^{\times}$, absurde en raison de l'indépendance $\mathbf{Z}_p$-linéaire de α_1, α_2 restreints à $\mathscr{G}_{K''}$.

3.2.5 - Théorème (Sen). *Soit $d > 0$ un entier.*

(i) On a $H^1(\mathscr{G}_{K_\infty}, \mathrm{GL}_d(\mathbf{C})) = \{1\}$.

(ii) L'application naturelle $H^1(\Gamma_K, \mathrm{GL}_d(K_\infty)) \to H^1(\Gamma_K, \mathrm{GL}_d(\widehat{K_\infty}))$ induite par l'inclusion $\mathrm{GL}_d(K_\infty) \subset \mathrm{GL}_d(\widehat{K_\infty})$ est bijective.

Par conséquent, selon (2.2.8), les applications naturelles

$$H^1\big(\Gamma_K, \mathrm{GL}_d(K_\infty)\big) \to H^1\big(\Gamma_K, \mathrm{GL}_d(\widehat{K_\infty})\big) \to H^1\big(\mathscr{G}_K, \mathrm{GL}_d(\mathbf{C})\big)$$

sont bijectives. En termes de représentations, toute $\mathbf{C}$-représentation de $\mathscr{G}_K$ apparaît comme extension des scalaires d'une K_∞-représentation, unique à isomorphe près.

On démontrera ces théorèmes plus tard (3.5-3.7).

3.2.6 - Lemme. *Soit $E \subset K$ un sous-corps tel que K/E soit galoisienne finie. Si $U : \mathrm{Gal}(K_\infty/E) \to \mathrm{GL}_d(K_\infty)$ est un cocycle continu, il existe n tel que U prenne des valeurs dans $\mathrm{GL}_d(K_n)$.*

Démonstration. Soit $S = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ un ensemble fini de générateurs topologiques de $\mathrm{Gal}(K_\infty/E)$ (on peut par exemple prendre S égal à la réunion de $\{\gamma_0\}$ et un ensemble (fini) de représentants de $\Gamma_0 = \mathrm{Gal}(K_\infty/K_0)$ dans $\mathrm{Gal}(K_\infty/E)$). Soit n tel que tous les $U_{\sigma_i} \in \mathrm{GL}_d(K_n)$. La condition de cocycle montre que $U_\sigma \in \mathrm{GL}_d(K_n)$ pour σ dans le sous-groupe engendré algébriquement par S ; alors il en est de même pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_\infty/E)$ par continuité et la complétude de $\mathrm{GL}_d(K_n)$. □

3.2.7 - Théorème. *Soit $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{C}}(\mathscr{G}_K)$. Il existe un unique K_∞-sous-espace de dimension finie D de V sur lequel $\mathscr{G}_{K_\infty}$ agit trivialement tel que $\mathbf{C} \otimes_{K_\infty} D \to V$ soit un isomorphisme de représentations de $\mathscr{G}_K$. On le notera $D_{\mathrm{Sen}}(V)$. On a plus précisément $D_{\mathrm{Sen}}(V) = (V^{\mathscr{G}_{K_\infty}})^{\mathrm{f}}$.*

Démonstration. L'existence vient de la bijectivité de $H^1(\Gamma_K, \mathrm{GL}_d(K_\infty)) \to H^1(\mathscr{G}_K, \mathrm{GL}_d(\mathbf{C}))$.

Soit D un tel espace. Montrons que $D = (V^{\mathscr{G}_{K_\infty}})^{\mathrm{f}}$. Identifions $\mathbf{C} \otimes_{K_\infty} D$ et $\widehat{K_\infty} \otimes_{K_\infty} D$ respectivement avec leurs images dans V. On a $\widehat{K_\infty} \otimes_{K_\infty} D = V^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ par (3.1.1). Soit $\mathbf{e} = \{e_i\}_i$ une K_∞-base de D. Selon (3.2.6), il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que l'action de Γ_K s'écrive comme cocycle $U : \Gamma_K \to \mathrm{GL}_d(K_n)$.

Si $x \in D$, les coordonnées de x en base $\mathbf{e}$ appartiennent à K_∞, donc à un certain K_m avec $m > n$. Par condition de cocycle, le K_m-sous-espace de $\widehat{K_\infty} \otimes_{K_\infty} D$ engendré par $\mathbf{e}$ contient x et est stable par Γ_K, tout en étant de K-dimension finie. Donc $x \in (\widehat{K_\infty} \otimes_{K_\infty} D)^{\mathrm{f}}$.

Inversement, si $x = \sum_i c_i e_i \in (\widehat{K_\infty} \otimes_{K_\infty} D)^{\mathrm{f}}$ avec $c_i \in \widehat{K_\infty}$, on a par semi-linéarité

$$\gamma(x) = \sum_{i,j} (U_\gamma)_{ij} \gamma(c_j) e_i$$

pour tout $\gamma \in \Gamma_K$. Les coeffcients $\sum_j (U_\gamma)_{ij} \gamma(c_j)$ de $\gamma(x)$ dans la base $\mathbf{e}$ engendrent un K-sous-espace de $\widehat{K_\infty}$ de dimension finie. Comme $U_\gamma \in \mathrm{GL}_d(K_n)$, les $\gamma(c_j) = \sum_i (U_\gamma^{-1})_{ji} \sum_l (U_\gamma)_{il} \gamma(c_l)$ engendrent un K_n-sous-espace de dimension finie de $\widehat{K_\infty}$. Donc $c_i \in \widehat{K_\infty}^{\mathrm{f}} = K_\infty$ par (3.2.3), puis $x \in D$, ce qui achève la preuve. □

3.2.8 - Corollaire. *L'association $V \mapsto D_{\mathrm{Sen}}(V)$ définit un foncteur $D_{\mathrm{Sen}} : \mathrm{Rep}_{\mathbf{C}}(\mathscr{G}_K) \to \mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma_K)$ qui commute avec les sommes directes, le produit tensoriel, le* Hom *interne et le dual. C'est une équivalence des catégories de quasi-inverse le foncteur $\mathbf{C}_K \otimes_{K_\infty} (-)$.*

Démonstration. Par unicité. □

3.2.9 - Remarque. Avec les notations de la preuve, si de plus U est à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{K_n})$, on a $D = (V^{\mathscr{G}_{K_\infty}})^{\mathcal{O}_K\text{-}\mathrm{f}}$. En effet, si $x \in D$, les coordonnées de x dans la base $\mathbf{e}$ appartiennent à un certain $p^{-s}\mathcal{O}_{K_m}$ avec $s \in \mathbb{N}$, $m > n$. Par la condition de cocycle, le $\mathcal{O}_{K_n}$-sous-module de type fini engendré par $p^{-s}\mathbf{e}$ contient x et est stable par Γ_K.

3.3 Opérateur de Sen

3.3.1 - Théorème. *Pour tout $D \in \mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma_K)$, il existe un unique endomorphisme K_∞-linéaire $\Theta = \Theta_D$ sur D tel que pour tout $x \in D$, il existe un sous-groupe ouvert Γ_x de Γ_K tel que*

$$\gamma(x) = \exp\bigl(\log \chi(\gamma) \cdot \Theta\bigr)(x), \quad \forall \gamma \in \Gamma_x. \tag{3.3.1.1}$$

On appellera Θ_D l'opérateur de Sen associé à D.

3.3.2 - Remarque. Soit A un opérateur linéaire sur un K_∞-espace vectoriel de dimension finie. L'exponentielle $\exp(cA)$ est bien définie lorsque $v_p(c) \gg 0$. Pour cela, prenons une K_∞-base, dans laquelle la matrice de A est alors à coefficients dans une extension finie K_n de $\mathbf{Q}_p$, pour laquelle l'exponentielle est bien définie par la série usuelle si les coefficients sont de valuation suffisamment grande.

Le logarithme d'un élément $1 + \mathfrak{m}_K$ est bien défini par la série bien connue. Le logarithme d'une matrice dans $\mathrm{Mat}_d(K_\infty)$ est bien défini et vérifie $\exp \circ \log = \mathrm{id}$ pour des matrices suffisamment proches de 1.

Démonstration. Montrons l'existence. Soit $\mathbf{e}$ une K_∞-base de D. L'action de Γ_K est décrite par un cocycle $U : \Gamma_K \to \mathrm{GL}_d(K_\infty)$, dont l'image est contenue dans $\mathrm{GL}_d(K_n)$ pour un $n \in \mathbb{N}$ (3.2.6). Quitte à augmenter n, et en notant $\Gamma_n = \mathrm{Gal}(K_\infty/K_n)$ qui est un sous-groupe ouvert distingué de Γ_K, on peut supposer que :

(a) $U|_{\Gamma_n} : \Gamma_n \to \mathrm{GL}_d(K_n)$ est multiplicatif.

(b) $v_p(U_\gamma - 1)$ est uniformément suffisamment grande pour $\gamma \in \Gamma_n$ de sorte que la série

$$\log U_\gamma = \sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} (U_\gamma - 1)^m \in \mathrm{Mat}_d(K_n)$$

converge et donne un morphisme de groupes continu $\Gamma_n \to \mathrm{Mat}_d(K_n)$ (compte tenu de (a)), et que l'exponentielle $\exp\bigl(\log U_\gamma\bigr)$ est bien définie et vaut U_γ pour $\gamma \in \Gamma_n$.

(c) L'application $\log \chi(\gamma)$ est bien définie et donne un morphisme de groupes injectif $\Gamma_n \to \mathcal{O}_K$.

Il existe alors $\Theta_{\mathbf{e}} \in \mathrm{Mat}_d(K_n)$ telle que

$$\log U_\gamma = \log \chi(\gamma) \cdot \Theta_{\mathbf{e}}$$

pour tout $\gamma \in \gamma_n^{\mathbf{Z}}$, donc pour tout $\gamma \in \Gamma_n$ par continuité et densité. On observe que $\Theta_{\mathbf{e}}$ ne dépend pas du choix de $n \gg 0$. Cela permet de voir que le K_∞-endomorphisme sur D défini par $\Theta_{\mathbf{e}}$ ne dépend pas de $\mathbf{e}$; en effet, si $B \in \mathrm{Mat}_d(K_\infty)$, il existe un entier n_B tel que $B \in \mathrm{Mat}_d(K_{n_B})$, donc on a $\gamma(B) = B$ pour $n \geq n_B$; d'après ce qui précède, pour $n \gg 0$ et $\gamma \in \Gamma_n$ on a

$$\log\bigl(B^{-1}U_\gamma\gamma(B)\bigr) = \log(B^{-1}U_\gamma B) = B^{-1}(\log U_\gamma)B = \log \chi(\gamma) \cdot B^{-1}\Theta_{\mathbf{e}}B,$$

le premier logarithme étant bien défini. On note Θ cet endomorphisme. Comme tout $x \in D$ se complète en une K_∞-base de D, on en conclut l'existence de Θ.

Montrons maintenant l'unicité. Remarquons que lorsque $\gamma \to 1$ mais $\gamma \neq 1$, $\log \chi(\gamma) \to 0$ mais n'est pas zéro par l'infinitude de $\mathrm{Im}\,\chi$. Donc, en prenant la dérivée de (3.3.1.1) en $\gamma = 1$, on obtient

$$\Theta(x) = \lim_{\Gamma_K \ni \gamma \to 1} \frac{\gamma(x) - x}{\log \chi(\gamma)}, \tag{3.3.2.1}$$

d'où l'unicité. □

3.3.3 - Corollaire. *Soit $D \in \mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma_K)$.*

(i) L'opérateur Θ_D est Γ_K-équivariant.

(ii) Il existe une K_∞-base $\mathbf{e} = \{e_i\}$ de D par rapport à laquelle la matrice de Θ est à coefficients dans K. La classe de similitude de cette matrice sur K est uniquement déterminée par D.

(iii) L'application naturelle $K_\infty \otimes_K D^{\Gamma_K} \to \ker \Theta_D$ est bien définie et bijective.

Démonstration. (i) découle du fait que Γ_K est commutatif et de (3.3.2.1).

(ii) Soit $\mathbf{e}'$ une K_∞-base quelconque de D. Soit U le cocycle représentant l'action de Γ_K. Soit T la matrice de Θ_D. Pour tout $\gamma \in \Gamma_K$, la matrice de $\Theta_D \circ \gamma$ (*resp.* $\gamma \circ \Theta_D$) est alors TU_γ (*resp.* $U_\gamma\gamma(T)$). On en déduit par (i) que $\gamma(T)$ est similaire à T pour tout γ. Les facteurs invariants de la matrice T sont alors fixés par Γ_K, donc appartiennent à $K_\infty^{\Gamma_K}[X] = K[X]$. Alors T est similaire à une matrice à coefficients dans K. Sa classe de similitude sur K ne dépend que de ses facteurs invariants, donc est indépendante de la base choisie.

(iii) Par (i), $\ker \Theta_D \subset D$ est une sous-représentation de Γ_K. Comme Γ_x est d'indice fini dans Γ_K pour $x \in D$, on déduit de la définition (3.3.1.1) que toute Γ_K-orbite dans $\ker \Theta_D$ est finie, autrement dit, l'action de Γ_K est décrite par un cocycle de Γ_K à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(K_\infty)$ où K_∞ est muni de la topologie discrète. Selon la descente galoisienne classique (2.3.2), cette action est triviale, on a un isomorphisme naturel de K_∞-représentations de Γ_K

$$K_\infty \otimes_K (\ker \Theta_D)^{\Gamma_K} \to \ker \Theta_D.$$

En remarquant que $D^{\Gamma_K} \subset \ker \Theta_D$ par la définition de Θ_D (3.3.1.1), on obtient $D^{\Gamma_K} = (\ker \Theta_D)^{\Gamma_K}$. □

3.3.4. Notons $\mathscr{S}_{K_\infty}$ la catégorie des K_∞-représentations de Γ_K munies d'un opérateur K_∞-linéaire Γ_K-équivariant, les morphismes étant les applications K_∞-linéaires commutant aux opérateurs dessus.

3.3.5 - Corollaire. *L'association $D \mapsto (D, \Theta)$ définit un foncteur $\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma_K) \to \mathscr{S}_{K_\infty}$. Soient $D_1, D_2 \in \mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma_K)$.*

(i) On a $\Theta_{D_1 \oplus D_2} = \Theta_{D_1} \oplus \Theta_{D_2}$, $\Theta_{D_1 \otimes D_2} = \Theta_{D_1} \otimes 1 + 1 \otimes \Theta_{D_2}$ et $\Theta_{\mathrm{Hom}_{K_\infty}(D_1,D_2)}(f) = \Theta_{D_2} \circ f - f \circ \Theta_{D_1}$ pour $f \in \mathrm{Hom}_{K_\infty}(D_1, D_2)$.

(ii) L'application naturelle K_∞-linéaire

$$K_\infty \otimes_K \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma_K)}(D_1, D_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}_{K_\infty}}\big((D_1, \Theta_{D_1}), (D_2, \Theta_{D_2})\big)$$

est bijective.

(iii) Pour que D_1, D_2 soient isomorphes dans $\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma_K)$, il faut et il suffit que (D_1, Θ_{D_1}), (D_2, Θ_{D_2}) soient isomorphes dans $\mathscr{S}_{K_\infty}$.

Démonstration. La fonctorialité et le (i) résultent de (3.3.2.1). Puis on obtient (ii) en appliquant (3.3.3, iii) à $D = \mathrm{Hom}_{K_\infty}(D_1, D_2)$. Pour (iii), il suffit de montrer la suffisance : grâce à (ii), on peut la reformuler comme un cas particulier du lemme général suivant avec $F = K$, $F' = K_\infty$, $F^m \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma_K)}(D_1, D_2)$ et $P(X_1, \ldots, X_m) = \det\big(\sum_i X_i f_i\big) \in K_\infty[X_1, \ldots, X_m]$, où $\{f_i\}_i$ est une K-base de D et le déterminant est pris par rapport à un choix fixé de bases de D_1, D_2.

3.3.5.1 - Lemme. *Soit F'/F une extension de corps avec F infini. Soit P un polynôme en m variables à coefficients dans F'. Si P n'est pas identiquement nul sur F'^m, il en est de même sur F^m.*

Ce lemme se démontre par récurrence sur le nombre de variables m, le cas $m = 1$ résultant du fait qu'un polynôme non nul en une variable n'a qu'un nombre fini de racines sur un corps. □

3.3.6 - Remarque. (i) Soit $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{C}}(\mathscr{G}_K)$. On note Θ_V aussi l'opérateur défini comme extension par des scalaires de l'opérateur de Sen associé à $D_{\mathrm{Sen}}(V)$, il est $\mathbf{C}$-linéaire $\mathscr{G}_K$-équivariant.

Si $V = \mathbf{C}(n)$ avec $n \in \mathbf{Z}$, alors $\Theta_V = n$. On en déduit que V est de Hodge-Tate si et seulement si Θ_V est semi-simple et si ses valeurs propres sont tous des entiers. Ses poids de Hodge-Tate sont alors ces valeurs propres (comptées avec multiplicité). Pour cette raison, si V est générale, on appelle les *poids de Hodge-Tate généralisés de V* les valeurs propres de Θ_V.

(ii) Les résultats ci-dessus restent vrais si l'on suppose plus généralement que K est un corps local de caractéristique 0 à corps résiduel parfait de caractéristique $p > 0$.

3.3.7. Invariance de Θ par rapport à une extension finiment ramifiée. Soit L/K une extension algébrique. Soient $L_\infty = LK_\infty$ et $\widehat{L}_\infty = \widehat{L}K_\infty$ (à ne pas confondre avec $\widehat{L_\infty}$).

Le groupe $\mathscr{G}_{\widehat{L}}$ est identifié au sous-groupe $\mathscr{G}_L$ de $\mathscr{G}_K$. Soit V une $\mathbf{C}$-représentation de $\mathscr{G}_K$ avec l'opérateur de Sen Θ_K. On note $V^{(L)}$ la restriction de cette représentation au sous-groupe $\mathscr{G}_L$ sur le même espace V, et on note $\Theta_{\widehat{L}}$ l'opérateur de Sen correspondant. Montrons que $\Theta_K = \Theta_{\widehat{L}}$ sur V.

Notons $V_\infty = D_{\mathrm{Sen}}(V)$ par rapport à K_∞/K, et $V_\infty^{(L)} = D_{\mathrm{Sen}}(V)$ par rapport à $\widehat{L}_\infty/\widehat{L}$. On a $V_\infty \subset V_\infty^{(L)}$ par (3.2.7). L'application naturelle $\mathrm{Gal}(\widehat{L}_\infty/\widehat{L}) \simeq \mathrm{Gal}(L_\infty/L) \to \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ est injective, continue et fermée, ayant pour image $\mathrm{Gal}(K_\infty/K_\infty \cap L)$.

Supposons maintenant que L/K soit une extension finiment ramifiée. Comme K_∞/K est potentiellement totalement ramifiée, l'intersection $K_\infty \cap L$ est alors une extension *finie* de K. Donc $\mathrm{Gal}(\widehat{L}_\infty/\widehat{L}) \simeq \mathrm{Gal}(K_\infty/K_\infty \cap L)$ est un sous-groupe ouvert de $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$. Alors, par la caractérisation (3.3.2.1) de l'opérateur de Sen, on déduit que Θ_K et $\Theta_{\widehat{L}}$ coïncident sur V_∞. Mais comme ils sont tous les deux $\mathbf{C}$-linéaires et que V_∞ contient une $\mathbf{C}$-base de V, on a $\Theta_K = \Theta_{\widehat{L}}$.

3.3.8. Variation de Θ par rapport au changement de caractère. Soit $\chi' : \mathscr{G}_K \to \mathcal{O}_K^\times$ un autre caractère continu infiniment ramifié, dont l'image contient un sous-groupe ouvert isomorphe à $\mathbf{Z}_p$. On a $[\log\chi'] = \theta[\log\chi] \in H^1(\mathscr{G}_K,\mathbf{C})$ pour un $\theta = \theta(\chi,\chi') \in K$ (3.2.1), qui est unique même si l'on remplace K par une extension finie de K. Soit $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{C}}(\mathscr{G}_K)$. Soient Θ et Θ' ses opérateurs de Sen respectivement par rapport aux caractères χ et χ'. Montrons que $\Theta = \theta\Theta'$.

Il existe $c \in \mathbf{C}$ tel que

$$\sigma(c) - c = \log\chi'(\sigma) - \theta\log\chi(\sigma)$$

pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_K$. Quitte à remplacer K par une extension finie plus large, on peut rendre $\Delta_K(c) = \inf_{\sigma\in\mathscr{G}_K} v_p\big(\sigma(c)-c\big)$ suffisamment grand. Comme il existe $\delta \in K = \mathbf{C}^{\mathscr{G}_K}$ tel que $v_p(c-\delta) \geq \Delta_K(c) - p/(p-1)^2$ (*resp.* $v_p(c-\delta) \gg 0$ si $\Delta_K(c) = 0$) par (3.1.1), quitte à remplacer c par $c-\delta$, on peut supposer $v_p(c)$ est suffisamment grand.

Prenons une $\mathbf{C}$-base de V, notée $\mathbf{e}'$, constituée de vecteurs e_i fixés par $\ker\chi'$ et K-finis, telle que Θ' est donné par une matrice $\Theta'_{\mathbf{e}'} \in \mathrm{Mat}_d(K)$. Quitte à agrandir K (qui ne change pas les opérateurs de Sen), on peut supposer que

(a) $v_p(c) \gg 0$ de sorte que l'exponentielle $\exp\big(c\Theta'_{\mathbf{e}'}\big)$ soit bien définie,

(b) l'action de $\sigma \in \mathscr{G}_K$ est donnée par le cocycle $U'_\sigma = \exp\big(\log\chi'(\gamma)\cdot\Theta'_{\mathbf{e}'}\big)$.

Alors on a $U'_\sigma = \exp\big((\theta\log\chi(\sigma) + (\sigma-1)(c))\Theta'_{\mathbf{e}'}\big) = \exp\big(-c\Theta'_{\mathbf{e}'}\big)\exp\big(\theta\log\chi(\sigma)\Theta'_{\mathbf{e}'}\big)\exp\big(\sigma(c)\Theta'_{\mathbf{e}'}\big)$. Considérons la $\mathbf{C}$-base $\mathbf{e} = \mathbf{e}'N$ où $N = \exp\big(c\Theta'_{\mathbf{e}'}\big)$. Alors sous cette base l'action de $\mathscr{G}_K$ est décrite par le cocycle

$$U_\sigma = N^{-1}U'_\sigma\sigma(N) = \exp\big(\log\chi(\sigma)\cdot\theta\Theta'_{\mathbf{e}'}\big).$$

Pour conclure $\Theta = \theta\Theta'$ par l'unicité (3.3.1), il faut vérifier que $\mathbf{e}$ est constituée de vecteurs fixés par $\ker\chi$ et K-finis : on le voit par la formule précédente, en se rappelant que $\log\chi(\sigma), \theta$ et $\Theta'_{\mathbf{e}'}$ sont à valeurs dans K.

3.3.9. Classification des C-représentations. L'équivalence $\mathrm{Rep}_{\mathbf{C}}(\mathscr{G}_K) \simeq \mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma_K)$ combinée avec (3.3.3) et (3.3.5) permet de transformer une $\mathbf{C}$-représentation de $\mathscr{G}_K$ en un objet linéaire sur K.

En effet, soient $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{C}}(\mathscr{G}_K)$ de dimension d et Θ_V son opérateur de Sen. Soit $\mathbf{e}$ une K_∞-base de V_∞ telle que la matrice $\Theta_{V,\mathbf{e}}$ de Θ_V soit à coefficients dans K (3.3.3, ii). Bien que $\Theta_{V,\mathbf{e}}$ dépende de la base choisie, sa classe de conjugaison dans $\mathrm{Mat}_d(K)$ est uniquement déterminée par la classe d'isomorphisme de V (3.3.3), et détermine celle-ci (3.3.5, iii).

3.3.10. On voudrait connaître les classes de conjugaison des matrices (carrées) sur K venant d'une $\mathbf{C}$-représentation de $\mathscr{G}_K$. Soit $\mathcal{C}(\overline{K})$ l'ensemble des sous-ensembles $A \subset \overline{K}$, où A est fini, stable et transitif sous $\mathscr{G}_K$, autrement dit, A est l'ensemble des racines d'un certain polynôme irréductible non nul sur K.

Notons $J_m(\lambda)$ le bloc de Jordan de taille m de valeur propre λ. Soit $\mathbf{Z}_p(0;d)$ la $\mathbf{Z}_p$-représentation de $\mathscr{G}_K$ où σ agit par la matrice $\exp\big(\log\chi(g)\cdot J_d(0)\big)$, bien définie car $J_d(0)$ est nilpotente. Une autre description est $\mathbf{Z}_p(0;d) = \mathbf{Z}_p[\log t]_{\leq d-1}$, l'ensemble des polynômes en la variable $\log t$ à coefficients dans $\mathbf{Z}_p$ de degré au plus $d-1$, l'action étant donnée par $\sigma(\log t) = \log\chi(g) + \log t$. La matrice de $\frac{\partial}{\partial\log t}$ dans la base usuelle est $J_d(0)$. Ainsi, toutes les matrices nilpotentes viennent d'une $\mathbf{C}$-représentation, plus particulièrement d'une $\mathbf{Z}_p$-représentation.

3.3.11 - Proposition. *Soient $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{C}}(\mathscr{G}_K)$, Θ_V son opérateur de Sen et $f \in K[X]$ son polynôme caractéristique et $m \in K[X]$ son polynôme minimal.*

(i) Si f est irréductible, V est simple.

(ii) Si V est simple, f est une puissance de m, qui est irréductible, et la classe d'isomorphisme de V est uniquement déterminée par m (autrement dit, par l'ensemble de ses valeurs propres).

(iii) Si V est indécomposable, m est une puissance d'un polynôme irréductible.

Démonstration. (i) Si V n'est pas simple, le polynôme caratéristique d'une sous-représentation de V est un facteur non trivial de f, donc f n'est pas irréductible.

(ii) Si V est simple, m est irréductible dans $K[X]$, sinon un facteur non trivial m_0 de m dans $K[X]$ donnerait une sous-représentation non triviale $\ker m_0(\Theta_V)$. De plus, soit $V' \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{C}}(\mathscr{G}_K)$ avec l'opérateur de Sen $\Theta_{V'}$. Soit f' son polynôme caractéristique où $m' = m$ est son polynôme minimal. On a $f = m^s$ et $f' = m^{s'}$. Comme m est irréductible, les facteurs invariants de Θ_V sont $m,\dots,m$ (s fois), et ceux de Θ_V sont $m,\dots,m$ (s' fois). Donc $\Theta_V^{\oplus s'} \simeq \Theta_{V'}^{\oplus s}$, puis $V^{\oplus s'} \simeq V'^{\oplus s}$, d'où $V \simeq V'$ puisqu'elles sont simples.

(iii) Si f possède deux facteurs irréductibles, on peut décomposer $f = gh$ avec $g,h \in K[X]$ non triviaux premiers entre eux. Alors $V = \ker g(\Theta_V) \oplus \ker h(\Theta_V)$ est une décomposition non triviale de représentations. □

3.3.12. L'ensemble des poids de Hodge-Tate généralisés d'une $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{C}}(\mathscr{G}_K)$ est une réunion disjointe d'ensembles $A_i \in \mathcal{C}(\overline{K})$ (comptés avec multiplicité). Si de plus V est semi-simple, la classe d'isomorphisme de V (en particulier sa dimension) est déterminée par ces ensembles A_i.

Réciproquement, on peut construire une représentation simple $\mathbf{C}[A] \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{C}}(\mathscr{G}_K)$ dont l'ensemble des poids de Hodge-Tate généralisés est A [Fon04]. On peut alors prendre $\mathbf{C}[A; d] = \mathbf{C}[A] \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p(0; d) \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{C}}(\mathscr{G}_K)$ pour fabriquer des représentations indécomposables non-semi-simples. Le théorème suivant [Fon04, Thm. 2.14] dit que nous obtenons ainsi toutes les $\mathbf{C}$-représentations de dimension finie de $\mathscr{G}_K$ à équivalence près.

3.3.13 - Théorème (Fontaine). *Soit* $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{C}}(\mathscr{G}_K)$.

(i) Pour que V *soit simple, il faut et il suffit qu'il existe* $A \in \mathcal{C}(\overline{K})$ *tel que* $V \simeq \mathbf{C}[A]$.

(ii) Pour que V *soit indécomposable, il faut et il suffit qu'il existe* $A \in \mathcal{C}(\overline{K})$ *et* $d \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $V \simeq \mathbf{C}[A; d]$.

(iii) Il existe des entiers naturels $\big(h_{A,d}(V)\big)_{A \in \mathcal{C}(\overline{K}), d \in \mathbb{N}^*}$ *presque tous nuls, uniquement déterminés, tels que* $V \simeq \bigoplus_{A \in \mathcal{C}(\overline{K}), d \in \mathbb{N}^*} \mathbf{C}[A; d]^{h_{A,d}(V)}$.

3.4 Représentations C-admissibles

3.4.1 - Théorème. *Soit* $\rho : \mathscr{G}_K \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{Q}_p}(V)$ *une* $\mathbf{Q}_p$*-représentation de* $\mathscr{G}_K$*. Alors* V *est* $\mathbf{C}$*-admissible si et seulement si l'image du groupe d'inertie* $\rho(I_K)$ *est finie.*

Démonstration. D'après l'invariance de l'opérateur de Sen par rapport à une extension finiment ramifiée, on peut supposer K *à corps résiduel algébriquement clos* (donc L/K est totalement ramifiée) en substituant $\widehat{K^{unr}}$ à K, et la suffisance est claire car on peut de plus remplacer K par son extension finie $\overline{K}^{\ker \rho}$ découpée par ρ. On est ramené à montrer le résultat suivant. □

3.4.2 - Proposition. *Soit* K *un corps local* p*-adique à corps résiduel algébriquement clos. Soit* $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathscr{G}_K)$*. Notons* $\rho : \mathscr{G}_K \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{Q}_p}(V)$ *son action. Si* V *est* $\mathbf{C}$*-admissible, alors* $\rho(\mathscr{G}_K)$ *est fini.*

On dispose du lemme technique suivant [Sen73, Lem. 3] qui servira à faire des approximations. Conservons les notations de (3.4.2). Fixons une $\mathbf{Q}_p$-base de V et écrivons $\rho : \mathscr{G}_K \to \mathrm{GL}_d(\mathbf{Q}_p)$ où $d = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$. Soit L/K l'extension découpée par ρ, qui est *totalement ramifiée.* Son groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(L/K)$, identifié à $\rho(\mathscr{G}_K)$ via le quotient $\overline{\rho}$ de ρ, est un sous-groupe de Lie p-adique compact de $\mathrm{GL}_d(\mathbf{Q}_p)$. Posons

$$G[n] = \{g \in G : v_p\big(\rho(g) - 1\big) \geq n\}, \quad n \geq 1.$$

C'est une *filtration de Lie* de $\overline{\rho}(G)$ (par des sous-groupes d'indice fini) au sens de [Sen73, §3, p.162] (qui renvoie lui-même à [Laz65]) : il existe un $\mathbf{Z}_p$-module libre $\mathfrak{g} \subset \mathrm{Mat}_d(\mathbf{Z}_p)$ tel que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathbf{Q}_p\mathfrak{g}$ et $G[n] = \exp\big(p^n \mathfrak{g}\big)$ pour n suffisamment grand.

Si H est un sous-ensemble de G et si $f : H \to \mathbf{C}$ est une application, on notera $v_p(f) = \inf_{h \in H} v_p\big(f(h)\big)$. Rappelons que pour $x \in \mathbf{C}$, on a l'application cobord $\partial x : G \to \mathbf{C}$, $g \mapsto g(x) - x$.

3.4.3 - Lemme. *Soient* L*,* G *et* $\{G[n]\}_{n \geq 1}$ *définis comme ci-dessus. Il existe une constante* $c_{Fil} > 0$ *telle que pour tout* $n \geq 1$*, toute application continue* $\lambda : G[n] \to \mathbf{Q}_p$ *et tout* $x \in \widehat{L}$*, on a*

$$v_p(\lambda) \geq v_p\big(\lambda - \partial x\big) - c_{Fil}.$$

Nous renvoyons à [Sen73, Lem. 3] ou [FO08, 3.3.2] pour la preuve. Elle est très technique et se base sur le théorème de Filtration de Sen [Sen72, §4, Thm.] ainsi qu'une étude de la ramification qui donne le résultat suivant [Sen73, §4, Lem. 4.0] ressemblant (1.8.5) : si on pose $K_n = L^{G[n]}$ et

$$x_n = \inf\{x \geq 0 : \forall t > x, \mathrm{Gal}(K_n/K)^t = \{1\}\}$$

pour $n \geq 1$, alors on a $x_{n+1} = x_n + e_K$ pour n suffisamment grand.

Démonstration de (3.4.2). Soit $N \geq 1$ suffisamment grand tel que $\rho(G[N])$ soit contenu dans un voisinage suffisamment petit de 1, de sorte que $\log \overline{\rho}(g) \in \mathrm{Mat}_d(\mathbf{Z}_p)$ est bien défini et son exponentielle vaut $\overline{\rho}(g)$ pour tout $g \in G[N]$. Il suffit de montrer que $G[N] = \{1\}$.

Comme V est $\mathbf{C}$-admissible, il existe $B \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{C})$ telle que $\rho(\sigma) = B^{-1}\sigma(B)$ pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_K$. Alors $B \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{C}^{\ker \rho}) = \mathrm{GL}_d(\widehat{L})$ et puis $\overline{\rho}(g) = B^{-1}g(B)$ pour tout $g \in G$. Quitte à multiplier B par une puissance de p, on peut supposer que $B \in \mathrm{Mat}_d(\mathcal{O}_{\widehat{L}})$.

Soit $n \geq N$ suffisamment grand. Pour $g \in G[n]$, on a $v_p(g(B)-B) \geq n$. D'après (3.1.1), il existe $B_n \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{K_n})$ telle que $v_p(B - B_n) \geq n-2\big(>v_p(B)\big)$. Pour $g \in G[n]$, on a aussi $\log \overline{\rho}(g) \in p^n \mathrm{Mat}_d(\mathbf{Z}_p)$ et $\overline{\rho}(g) \equiv 1+\log\overline{\rho}(g) \pmod{p^{2n}}$, donc

$$g(B) \equiv B + B\log\overline{\rho}(g) (\mathrm{mod}\, p^{2n}) \equiv B + B_n \log\overline{\rho}(g)(\mathrm{mod}\, p^{2n-2})$$

$$v_p\Big(\log\overline{\rho}(g) - g(B_n^{-1}B) + B_n^{-1}B\Big) \geq 2n-2+v_p(B_n^{-1}) = 2n-2+v_p(B^{-1}).$$

En appliquant (3.4.3) à chaque coefficient de $\log\overline{\rho}(g)$, on obtient

$$v_p(\log\overline{\rho}(g)) \geq 2n-2+v_p(B^{-1}) - c_{\mathrm{Fil}}$$

pour tout $g \in G[n]$. Maintenant, si $g \in G[N]$, on a $g^{p^{n-N}} \in G[n]$, puis $\log\overline{\rho}(g) = \frac{1}{p^{n-N}} \log\overline{\rho}(g^{p^{n-N}})$ et donc

$$v_p(\log\overline{\rho}(g)) \geq n-2+v_p(B^{-1}) - c_{\mathrm{Fil}} + N.$$

On en tire $\log\overline{\rho}(g) = 0$ pour $g \in G[N]$, donc $G[N] = \{1\}$. □

3.5 Descente presque étale

3.5.1 - Théorème. *(i) On a $H^1(\mathscr{G}_{K_\infty}, \mathrm{GL}_d(\mathbf{C})) = 1$.*

(ii) Pour tout cocycle $U : \mathscr{G}_{K_\infty} \to \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\mathbf{C}})$, il existe M/K_∞ une extension galoisienne finie et une matrice $B \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\mathbf{C}})$ telles que $B^{-1}U_\sigma\sigma(B) = 1$ pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_M$.

La démonstration, notamment l'étape (3.5.4), se base essentiellement sur le résultat de Tate (1.8.4).

Si $f : \mathscr{G}_{K_\infty} \to \mathrm{Mat}_d(\mathbf{C})$ est une application, on notera $v_p(f) = \inf_{g\in G} v_p\big(f(g)\big)$.

3.5.2 - Lemme. *Soit Λ un sous-corps fermé de $\mathbf{C}$. Soit $A \in \mathrm{Mat}_d(\Lambda)$. Si $v_p(A-1) > 0$ alors $A \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_\Lambda)$ et $A^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty}(1-A)^i$.*

Démonstration. On a $v_p(A) \geq \min\{v_p(A-1), v_p(1)\} = 0$ donc $A \in \mathrm{Mat}_d(\mathcal{O}_\Lambda)$. D'ailleurs, la série $\sum_{i=0}^{+\infty}(1-A)^i$ converge dans $\mathrm{Mat}_d(\mathcal{O}_\Lambda)$ par complétude et sa limite P vérifie $AP = \lim_n A\sum_{i=0}^{n-1}(1-A)^i = \lim_n \big(1-(1-A)^n\big) = 1$, donc $P = A^{-1}$ puis $A \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_\Lambda)$. □

3.5.3 - Lemme. *Soit $U : \mathscr{G}_{K_\infty} \to \mathrm{GL}_d(\mathbf{C})$ une application continue. Pour tout $r > 0$, il existe une extension finie M/K_∞ telle que $\inf_{\tau\in\mathscr{G}_M} v_p(U_\tau - 1) \geq r$.*

Démonstration. L'ensemble $\{A \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{C}) : v_p(A-1) \geq r\}$ est un ouvert de $\mathrm{GL}_d(\mathbf{C})$. Son image réciproque par U, contenant l'élément neutre de $\mathscr{G}_{K_\infty}$, contient donc un sous-groupe ouvert qui, selon la définition de la topologie sur $\mathscr{G}_{K_\infty}$ et la correspondance de Galois, est de la forme $\mathscr{G}_M$ avec M une extension galoisienne finie de K_∞. □

3.5.4 - Lemme. *Soit $U : \mathscr{G}_{K_\infty} \to \mathrm{GL}_d(\mathbf{C})$ un cocycle continu tel que $\inf_{\tau\in\mathscr{G}_{K_\infty}} v_p(U_\tau - 1) = x > 0$. Soient $\epsilon \in (0,x)$, $N > 0$. Alors il existe une matrice $B \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\mathbf{C}})$ telle que pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_{K_\infty}$, on ait*

$$v_p(B^{-1}U_\sigma\sigma(B) - 1) \geq N \quad \textit{et} \quad v_p(B-1) \geq x - \epsilon.$$

Démonstration. Soit M/K_∞ une extension galoisienne finie telle que $\inf_{\tau\in\mathscr{G}_M} v_p(U_\tau - 1) \geq N + \epsilon$ (3.5.3). Soit $\alpha \in M$ tel que $\mathrm{Tr}_{M/K_\infty}(\alpha) = 1$ et $v_p(\alpha) > -\epsilon$ (1.8.4).

Soit T un système de représentants de $\mathscr{G}_M$ dans $\mathscr{G}_{K_\infty}$. Posons

$$B = \sum_{\tau\in T} \tau(\alpha) U_\tau.$$

Pour $\sigma \in \mathscr{G}_{K_\infty}$, on a

$$U_\sigma\sigma(B) = \sum_{\tau\in T} \sigma\tau(\alpha) U_\sigma\sigma(U_\tau) = \sum_{\tau\in T} \sigma\tau(\alpha) U_{\sigma\tau}$$

où l'on a utilisé la condition de cocycle sur U. Pour chaque $\tau \in T$, il existe uniques $\tau' \in T$, $\sigma' \in \mathscr{G}_M$ tels que $\sigma\tau = \tau'\sigma'$. Lorsque τ parcourt T, les τ' forment une permutation de T. On a alors $\sigma\tau(\alpha) = \tau'(\alpha)$ car $\alpha \in M$ est fixé par σ'. En utilisant de plus $\sum_{\tau'\in T} \tau'(\alpha) = \mathrm{Tr}_{M/K_\infty}(\alpha) = 1$, on obtient

$$U_\sigma\sigma(B) - B = \sum_{\tau'\in T} \tau'(\alpha)\big(U_{\tau'\sigma'} - U_{\tau'}\big) = \sum_{\tau'\in T} \tau'(\alpha) U_{\tau'}\big(\tau'(U_{\sigma'}) - 1\big)$$

qui est de valuation

$$v_p(U_\sigma\sigma(B)-B) \geq \inf_{\tau'\in T,\sigma'\in\mathscr{G}_M} v_p\big(\tau'(U_{\sigma'}-1)\big)+v_p(\alpha) = \inf_{\sigma'\in\mathscr{G}_M} v_p(U_{\sigma'}-1)+v_p(\alpha) \geq N.$$

Par ailleurs, on a $v_p(B-1) \geq \inf_{\tau\in\mathscr{G}_{K_\infty}} v_p(U_\tau-1)+v_p(\alpha) \geq x-\epsilon > 0$, donc $B \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\mathbf{C}})$ (3.5.2) et on obtient $v_p(B^{-1}U_\sigma\sigma(B)-1) \geq N$ pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_{K_\infty}$. □

3.5.5 - Lemme. *Soit $U : \mathscr{G}_{K_\infty} \to \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\mathbf{C}})$ un cocycle continu tel que $\inf_{\tau\in\mathscr{G}_{K_\infty}} v_p(U_\tau-1) > 0$. Alors il existe une matrice $B \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\mathbf{C}})$ telle que $B^{-1}U_\sigma\sigma(B) = 1$ pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_{K_\infty}$.*

Démonstration. Notons $x = \inf_{\tau\in\mathscr{G}_{K_\infty}} v_p(U_\tau-1)$. Soit $\epsilon \in (0,x)$. En appliquant (3.5.4) inductivement, on obtient $B_n \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\mathbf{C}})$, $n \geq 1$ telles que

$$v_p\big((B_1\cdots B_n)^{-1}U_\sigma\sigma(B_1\cdots B_n)-1\big) \geq (n+1)x \quad \text{et} \quad v_p(B_n-1) \geq nx-\epsilon$$

pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_{K_\infty}$. Alors on a

$$v_p(B_1\cdots B_{n+1}-B_1\cdots B_n) \geq v_p(B_{n+1}-1) \geq nx-\epsilon$$
$$v_p\big((B_1\cdots B_{n+1})^{-1}-(B_1\cdots B_n)^{-1}\big) \geq v_p(1-B_{n+1}) \geq nx-\epsilon.$$

Donc $B_1\cdots B_n$ forme une suite de Cauchy et converge vers une matrice $B \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\mathbf{C}})$ dont l'inverse est la limite de $(B_1\cdots B_n)^{-1}$. On obtient alors $v_p(B-1) = v_p(B_1-1) \geq x-\epsilon$ et $v_p(B^{-1}U_\sigma\sigma(B)-1) = +\infty$ pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_{K_\infty}$. □

Démonstration de (3.5.1). Soit $U : \mathscr{G}_{K_\infty} \to \mathrm{GL}_d(\mathbf{C})$ un cocycle continu. Il existe d'après (3.5.3) et (3.5.5) une extension galoisienne finie M/K_∞ telle que la classe de U dans $H^1(\mathscr{G}_M,\mathrm{GL}_d(\mathbf{C}))$ (*resp.* $H^1(\mathscr{G}_M,\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\mathbf{C}}))$) soit triviale. Le (ii) en découle. Considérons la suite exacte

$$1 \to H^1\big(\mathrm{Gal}(M/K_\infty),\mathrm{GL}_d(\mathbf{C}^{\mathscr{G}_M})\big) \to H^1\big(\mathscr{G}_{K_\infty},\mathrm{GL}_d(\mathbf{C})\big) \to H^1\big(\mathscr{G}_M,\mathrm{GL}_d(\mathbf{C})\big)$$

Comme on a $\mathbf{C}^{\mathscr{G}_M} = \widehat{M}$ (3.1.1) et $H^1(\mathrm{Gal}(M/K_\infty),\mathrm{GL}_d(\widehat{M})) = \{1\}$ (2.3.3), la classe de U dans $H^1(\mathscr{G}_{K_\infty},\mathrm{GL}_d(\mathbf{C}))$ est aussi triviale. □

3.5.6 - Théorème. *(i) Si $W \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{C}}(\mathscr{G}_{K_\infty})$, on a $H^1(\mathscr{G}_{K_\infty},W) = 0$.*
(ii) Si $W \in \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_{\mathbf{C}}}(\mathscr{G}_{K_\infty})$, on a $\mathfrak{m}_{K_\infty}H^1(\mathscr{G}_{K_\infty},W) = 0$.

Dans le (i) (*resp.* (ii)), fixons un isomorphisme $W \simeq \mathbf{C}^d$ (*resp.* $W \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{C}}^d$), via lequel on définit une valuation sur W par $v_p((x_i)_{1\leq i\leq d}) = \min\{v_p(x_i) : 1 \leq i \leq d\}$. L'action de $\mathscr{G}_{K_\infty}$ sur W est décrite par un cocycle continu $U : \mathscr{G}_{K_\infty} \to \mathrm{GL}_d(\mathbf{C})$. Par la compacité de $\mathscr{G}_{K_\infty}$, il existe une constante $c_W > 0$ telle que $v_p(\sigma(w)) \geq v_p(w)-c_W$ pour tous $\sigma \in \mathscr{G}_{K_\infty}$, $w \in W$.

Si $f : \mathscr{G}_{K_\infty} \to W$ est un cocycle, on notera $v_p(f) = \inf_{g\in G} v_p(f_g)$.

3.5.7 - Lemme. *Soient $W \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{C}}(\mathscr{G}_{K_\infty})$ et $f : \mathscr{G}_{K_\infty} \to W$ un cocycle continu. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $c \in W$ tel que l'on ait $f = \partial c$ et $v_p(c) \geq v_p(f)-\epsilon$.*

Démonstration. Soient $\epsilon, N > 0$. Par continuité, il existe une extension M/K galoisienne finie telle que $v_p(f|_{\mathscr{G}_M}) \geq N+c_W+\epsilon$ (*cf.* (3.5.3)). Soit $\alpha \in M$ tel que $v_p(\alpha) \geq -\epsilon$, $\mathrm{Tr}_{M/K_\infty}(\alpha) = 1$. Posons

$$b = \sum_{\tau\in T}\tau(\alpha)f_\tau$$

avec T un système de représentants de $\mathscr{G}_{K_\infty}/\mathscr{G}_M$. Pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_{K_\infty}$ on a

$$f_\sigma+\sigma(b)-b = \sum_{\tau'\in T}\tau'(\alpha)\tau'(f_{\sigma'})$$

avec $\sigma' \in \mathscr{G}_M$ dépendant de τ', sa valuation est

$$v_p(f_\sigma+\sigma(b)-b) \geq \inf_{\tau'\in T,\sigma'\in\mathscr{G}_M} v_p\big(\tau'(f_{\sigma'})\big)+v_p(\alpha) \geq v_p(f|_{\mathscr{G}_M})-c_W-\epsilon \geq N.$$

Comme on a aussi $v_p(b) \geq v_p(f)-\epsilon$, on obtient donc un analogue de (3.5.4). Par approximation successive (*cf.* (3.5.5)), on obtient (3.5.7). □

Démonstration de (3.5.6). Le (i) découle de (3.5.7).

Pour le (ii), soient $f : \mathscr{G}_{K_\infty} \to W$ un cocycle continu et $x \in \mathfrak{m}_{K_\infty}$. En appliquant (3.5.7) à $\mathbf{C} \otimes_{\mathcal{O}_\mathbf{C}} W \in \mathrm{Rep}_\mathbf{C}(\mathscr{G}_{K_\infty})$ et $\epsilon = v_p(x) > 0$, il existe $c \in \mathbf{C} \otimes_{\mathcal{O}_\mathbf{C}} W$ tel que $f = \partial c$ et $v_p(c) \geq v_p(f) - \epsilon$. Alors $xf = \partial(xc)$ et $v_p(xc) \geq v_p(f) \geq 0$. Donc $xc \in W$ et la classe de xf dans $H^1(\mathscr{G}_{K_\infty}, W)$ est triviale. □

3.5.8 - Remarque. Dans la preuve de (3.5.6), on n'a plus besoin d'inverser b multiplicativement comme inverser B dans la preuve de (3.5.1), donc on n'a plus besoin de (3.5.2) et (3.5.3) pour passer à une extension finie M/K_∞ telle que les conditions sur la valuation de (3.5.4) et (3.5.5) soient satisfaites.

3.6 Traces de Tate normalisées

3.6.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons la *trace normalisée* $R_n : K_\infty \to K_n$ par $R_n(x) = \frac{1}{p^{m-n}} \mathrm{Tr}_{K_m/K_n}(x)$ si $x \in K_m$, qui est indépendant du choix de K_m par transitivité de la trace et l'égalité $[K_m : K_n] = p^{m-n}$. Il est clair que R_n est K_n-linéaire et Γ_K-équivariante (1.5.1).

3.6.2 - Lemme. *Il existe une constante $c > 0$ telle que $v_p(R_n(x)) \geq v_p(x) - p^{-n}c$ pour tous $x \in K_\infty$, $n \in \mathbb{N}$*

Démonstration. Par transitivité de la trace et (1.8.8). □

3.6.3 - Proposition. *L'application R_n s'étend uniquement en une application $\widehat{R_n} : \widehat{K_\infty} \to K_n$.*

(i) L'application $\widehat{R_n}$ est K_n-linéaire et Γ_K-équivariante.

(ii) La restriction $\widehat{R_n}|_{K_n}$ est identité. Pour $m \geq n$, on a $\widehat{R_m} \circ \widehat{R_n} = \widehat{R_n} \circ \widehat{R_m} = \widehat{R_n}$.

(iii) Pour tous $x \in \widehat{K_\infty}$, $n \in \mathbb{N}$, on a $v_p(\widehat{R_n}(x)) \geq v_p(x) - p^{-n}c$ avec c la constante de (3.6.2).

(iv) On a $\lim_{n\to+\infty} \widehat{R_n}(x) = x$ pour tout $x \in \widehat{K_\infty}$.

Démonstration. L'existence et l'unicité de $\widehat{R_n}$ ainsi que le (iii) résultent de (3.6.2). Les (i) et (ii) sont vrais pour R_n, donc aussi pour $\widehat{R_n}$ par continuité. Le (iv) est vrai si $x \in K_\infty$, donc reste vrai pour $x \in \widehat{K_\infty}$ par l'équicontinuité uniforme de $\{\widehat{R_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ montrée par (iii). □

3.6.4 - Lemme. *Pour $x \in K_{n+1}$, on a $v_p\big(x - R_n(x)\big) \geq v_p\big((1-\gamma_n)(x)\big) - 1$.*

Démonstration. On a

$$px - \mathrm{Tr}_{K_{n+1}/K_n}(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \big(x - \gamma_n^i(x)\big) = \sum_{i=1}^{p-1} (1 + \cdots + \gamma_n^{i-1})(1-\gamma_n)(x).$$

Donc on obtient $v_p\big(px - pR_n(x)\big) = v_p\big(px - \mathrm{Tr}_{K_{n+1}/K_n}(x)\big) \geq v_p\big((1-\gamma_n)(x)\big)$, d'où le résultat. □

3.6.5 - Proposition. *Soit $c > 0$ la constante dans (3.6.2). Pour tous $x \in \widehat{K_\infty}$, $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$v_p\big(x - \widehat{R_n}(x)\big) \geq v_p\big((1-\gamma_n)(x)\big) - 1 - p^{-n}(1-p^{-1})^{-1}c.$$

Démonstration. Montrons par récurrence sur $m \geq n$ que pour $x \in K_m$ on a

$$v_p\big(x - R_n(x)\big) \geq v_p\big((1-\gamma_n)(x)\big) - 1 - (p^{-n} + p^{-(n+1)} + \cdots + p^{-(m-1)})c. \tag{$\star$}$$

Le cas $m = n$ est évident. Supposons que ($\star$) soit valide pour un certain $m \geq n$. Pour $x \in K_{m+1}$, on a $x - R_n(x) = x - R_m(x) + R_m(x) - R_n(x) = \big(x - R_m(x)\big) + \big(R_m(x) - R_nR_m(x)\big)$. D'une part, on a $\gamma_m = \gamma_n^{p^{m-n}}$, donc par le lemme précédent

$$\begin{aligned} v_p\big(x - R_m(x)\big) &\geq v_p\big((1-\gamma_m)(x)\big) - 1 \\ &= v_p\big((1 + \gamma_n + \cdots + \gamma_n^{p^{m-n}-1})(1-\gamma_n)(x)\big) - 1 \\ &\geq v_p\big((1-\gamma_n)(x)\big) - 1 \end{aligned}$$

D'autre part, comme $R_m(x) \in K_m$, on obtient par l'hypothèse de récurrence et (3.6.3)

$$\begin{aligned} v_p\big(R_m(x) - R_nR_m(x)\big) &\geq v_p\big((1-\gamma_n)R_m(x)\big) - 1 - (p^{-n} + p^{-(n+1)} + \cdots + p^{-(m-1)})c \\ &= v_p\big(R_m(1-\gamma_n)(x)\big) - 1 - (p^{-n} + p^{-(n+1)} + \cdots + p^{-(m-1)})c \\ &\geq v_p\big((1-\gamma_n)(x)\big) - p^{-m}c - 1 - (p^{-n} + p^{-(n+1)} + \cdots + p^{-(m-1)})c \end{aligned}.$$

En combinant ces deux estimations, on a montré ($\star$) pour $m+1$. On obtient alors le résultat voulu pour $x \in K_\infty$. On en conclut par continuité. □

3.6.6 - Proposition. *Posons $X_n = \ker \widehat{R_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.*

(i) On a la décomposition $\widehat{K_\infty} = K_n \oplus X_n$ en tant qu'espaces de Banach.

(ii) L'opérateur borné $\gamma_n - 1$ s'annule sur K_n et est inversible sur X_n. Plus précisément, on a

$$v_p(x) \leq v_p\big((1-\gamma_n)(x)\big) \leq v_p(x) + c_n$$

pour tout $x \in X_n$, où $c_n = 1 + p^{-n}(1-p^{-1})^{-1}c$ avec c la constante de (3.6.2).

(iii) Soit $\lambda \in 1 + \mathfrak{m}_K$. Si λ n'est pas une racine de l'unité, alors $\gamma_n - \lambda$ est inversible sur $\widehat{K_\infty}$.

Démonstration. (i) résulte du fait que $\widehat{R_n}$ est un projecteur continu vers K_n de noyau X_n.

(ii) Il suffit de montrer l'inégalité à droite. Pour cela, il suffit de remarquer que pour $x \in X_n$, on a $x = x - \widehat{R_n}(x)$, et d'appliquer ensuite (3.6.5).

(iii) Selon (3.6.3, i), $\widehat{R_n}$ commute avec $\gamma_n - \lambda$, donc $\gamma_n - \lambda$ préserve K_n et X_n. La restriction de $\gamma_n - \lambda$ à K_n est la multiplication par $1-\lambda \neq 0$, qui est inversible. Considérons alors $\gamma_n - \lambda = (\gamma_n - 1) - (\lambda - 1)$. Comme $\gamma_n - 1$ est inversible sur X_n, il suffit de montrer que $1 - (\lambda-1)(\gamma_n-1)^{-1}$ est inversible sur X_n ; il suffit que l'opérateur $(\lambda-1)(\gamma_n-1)^{-1}$ soit strictement contractant par rapport à la norme $\|\cdot\| = e^{-v_p(\cdot)}$, par exemple dans le cas où

$$v_p(\lambda - 1) \geq 1 + p^{-n}(1-p^{-1})^{-1}c.$$

Ainsi, si λ vérifie cette inégalité, $\gamma_n - \lambda$ est inversible sur X_n, donc aussi sur $\widehat{K_\infty}$. Dans le cas général, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda' = \lambda^{p^r}$ vérifie l'inégalité ci-dessus avec $n' = n + r$. Comme λ n'est pas une racine de l'unité, on a $\lambda' \neq 1$. Alors $\gamma_n^{p^r} - \lambda^{p^r} = \gamma_{n'} - \lambda'$ est inversible sur $\widehat{K_\infty}$ d'après ce qui précède. Étant un facteur de cet opérateur, $\gamma_n - \lambda$ est aussi inversible sur $\widehat{K_\infty}$. □

Démonstration de (3.2.1). Soit $\eta : \mathscr{G}_K \to \mathcal{O}_K^\times$ un caractère continu dont l'image contient un sous-groupe ouvert isomorphe à $\mathbf{Z}_p$. Pour ne pas confondre avec la notation K_∞ déjà utilisée, soit K'_∞/K une extension infiniment ramifiée vérifiant ($\mathbf{Z}_p$-Ext) telle que $\mathscr{G}_{K'_\infty} \subset \ker \eta$. Soient Γ'_K, K'_0 et γ'_0 définis à partir de K'_∞ suivant (1.8.1). On précisera le choix de K'_∞ dans les deux cas ci-dessous.

Remarquons d'abord que $\mathbf{C}(\eta)^{\mathscr{G}_{K'_\infty}} = \mathbf{C}^{\mathscr{G}_{K'_\infty}}(\eta) = \widehat{K'_\infty}(\eta)$ par (3.1.1). On a alors

$$H^0(\mathscr{G}_K, \mathbf{C}(\eta)) = H^0(\Gamma'_K, \widehat{K'_\infty}(\eta)) = H^0(\mathrm{Gal}(K'_\infty/K'_0), \widehat{K'_\infty}(\eta))^{\mathrm{Gal}(K'_0/K)}.$$

Comme on a $H^1(\mathscr{G}_{K'_\infty}, \mathbf{C}(\eta)) = 0$ (3.5.6) , l'inflation $H^1(\Gamma'_K, \widehat{K'_\infty}(\eta)) \to H^1(\mathscr{G}_K, \mathbf{C}(\eta))$ est bijective. Par (2.2.8), on obtient alors

$$H^1(\mathscr{G}_K, \mathbf{C}(\eta)) \simeq H^1(\mathrm{Gal}(K'_\infty/K'_0), \widehat{K'_\infty}(\eta))^{\mathrm{Gal}(K'_0/K)}.$$

Selon (2.2.4), on a

$$\begin{aligned} H^0(\mathrm{Gal}(K'_\infty/K'_0), \widehat{K'_\infty}(\eta)) &= \ker(\widehat{K'_\infty}(\eta) \xrightarrow{\gamma'_0 - 1} \widehat{K'_\infty}(\eta)) \simeq \ker(\widehat{K'_\infty} \xrightarrow{\gamma'_0 - \lambda} \widehat{K'_\infty}) \\ H^1(\mathrm{Gal}(K'_\infty/K'_0), \widehat{K'_\infty}(\eta)) &\hookrightarrow \widehat{K'_\infty}(\eta)/(\gamma'_0 - 1)\widehat{K'_\infty}(\eta) \simeq \widehat{K'_\infty}/(\gamma'_0 - \lambda)\widehat{K'_\infty} \end{aligned}$$

où $\lambda = \eta(\gamma_0'^{-1})$. On calculera ces derniers (K-espaces vectoriels).

Cas où $\eta(I_K)$ est infini. Prenons $K'_\infty = \overline{K}^{\ker \eta}$. Comme $\lim_n \gamma_0'^{p^n} = 1$, on a $\lim_n \eta(\gamma'_0)^{p^n} = 1$ par continuité, donc $\eta(\gamma'_0) \in 1 + \mathfrak{m}_K$. L'image de η étant infinie (car elle contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z}_p$), λ n'est pas une racine de l'unité. La bijectivité de $\gamma'_0 - \lambda$ (3.6.6, iii) implique alors la trivialité de $H^i(\mathrm{Gal}(K'_\infty/K'_0), \widehat{K'_\infty}(\eta))$, $i = 0,1$.

Cas où $\eta(I_K)$ est fini. Alors $\mathbf{C}(\eta) \simeq \mathbf{C}$ en tant que $\mathbf{C}$-représentations de $\mathscr{G}_K$ par (2.5.2, i). On est ramené alors au cas où le caractère η est *trivial.*

Quant au H^0, c'est un cas particulier du théorème d'Ax-Sen-Tate (3.1.1). Pour calculer H^1, soit χ le caractère fixé au début du chapitre et prenons $K'_\infty = K_\infty$. La décomposition $\widehat{K_\infty} = K_0 \oplus X_0$ étant $\mathscr{G}_K$-équivariante, on a

$$H^1(\mathrm{Gal}(K_\infty/K_0), \widehat{K_\infty}) = H^1(\mathrm{Gal}(K_\infty/K_0), K_0) \oplus H^1(\mathrm{Gal}(K_\infty/K_0), X_0)$$

Comme $\gamma_0 - 1$ s'annule sur K_0 et est bijectif sur X_0, on déduit

$$H^1(\mathrm{Gal}(K_\infty/K_0), \widehat{K_\infty}) \simeq \mathrm{Hom}_{cont}(\mathrm{Gal}(K_\infty/K_0), K_0) = K_0 \log \chi \simeq K_0$$

où les isomorphismes sont $\mathrm{Gal}(K_0/K)$-équivariants. On en déduit au final

$$H^1(\mathscr{G}_K, \mathbf{C}) \simeq H^1(\Gamma_K, \widehat{K_\infty}) \simeq K \log \chi \simeq K.$$

□

Démonstration de (3.2.3). En remplaçant K par K_0 et W par K_0W, on peut supposer que K_∞/K est une $\mathbf{Z}_p$-extension totalement ramifiée avec un générateur topologique γ_0 de Γ_K.

On pourra remplacer K par une extension finie quelconque L de K. En effet, considérons L_∞/L et $LW \subset \widehat{L_\infty}$ un L-sous-espace de dimension finie stable par $\mathrm{Gal}(L_\infty/L)$. Si $LW \subset L_\infty$, alors on aura $W \subset \widehat{K_\infty} \cap L_\infty = K_\infty$.

Par la K-finitude, l'application K-linéaire $\gamma|_W$ est annulée par son polynôme minimal $P(X) \in K[X]$. Soit L le corps de décomposition de $P(X)$ sur K. Quitte à remplacer L par un certain L_m comme dans (la preuve de) (1.4.2), on peut supposer que $L \cap K_\infty = K_n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Soit γ_0' un générateur topologique de $\mathrm{Gal}(L_\infty/L)$ tel que son image dans Γ_K soit $\gamma_0^{p^n}$. Alors le polynôme minimal de $\gamma_0'|_{LW}$ dans $L[X]$ est égal au polynôme minimal de $\gamma_0^{p^n}|_{K_nW}$ dans $K_n[X]$, qui divise le polynôme minimal de $\gamma_0^{p^n}|_W$ dans $K[X]$. Les valeurs propres de $\gamma'|_{LW}$ sont alors des puissances p^n-ièmes de racines de $P(X)$, qui appartiennent bien à L. On est donc ramené au cas où toutes les valeurs propres de $\gamma_0|_W$ sont toutes contenues dans K.

Soit $\lambda \in K$ une valeur propre de γ_0 et soit $w \in W$ un vecteur propre associé. Comme $\lim_{r\to+\infty} \gamma_0^{p^r} = 1$ dans Γ, on a $\lim_{r\to+\infty} \lambda^{p^r} = 1$ dans $\widehat{K_\infty}$, donc $\lambda \in 1 + \mathfrak{m}_K$. Comme $\gamma_0 - \lambda$ n'est pas injectif sur K_∞, λ est une racine p^r-ième de l'unité par (3.6.6, iii). Donc, quitte à remplacer K par un certain K_n et γ_0 par $\gamma_0^{p^n}$, on peut supposer toutes les valeurs propres de $\gamma_0|_W$ sont 1.

Alors $\gamma_0|_W - 1$ est nilpotent. Mais comme (3.6.6) $\widehat{K_\infty} = K \oplus X_0$ avec $\gamma_0 - 1 : X_0 \to X_0$ bijectif et $\gamma_0 - 1 : K \to K$ nul, on conclut $W \subset K_0 \subset K_\infty$. □

3.7 Décomplétion

On utilisera les décompositions $\widehat{K_\infty} = K_n \oplus X_n$ et l'inversibilité de $\gamma_n - 1$ sur X_n pour descendre de $\widehat{K_\infty}$ à $\bigcup K_n = K_\infty$ par une procédure appelée « décomplétion ».

3.7.1 - Théorème. *Soit $E \subset K$ un sous-corps tel que K/E soit galoisienne finie. Les applications*

$$H^1(\mathrm{Gal}(K_\infty/E), \mathrm{GL}_d(K_\infty)) \to H^1(\mathrm{Gal}(K_\infty/E), \mathrm{GL}_d(\widehat{K_\infty}))$$
$$H^1(\mathrm{Gal}(K_\infty/E), \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{K_\infty})) \to H^1(\mathrm{Gal}(K_\infty/E), \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K_\infty}}))$$

induites respectivement par les inclusions $\mathrm{GL}_d(K_\infty) \subset \mathrm{GL}_d(\widehat{K_\infty})$, $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{K_\infty}) \subset \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K_\infty}})$ sont bijectives.

Ici $\mathrm{Gal}(K_\infty/E)$ pourrait être non abélien.

Démonstration. **Injectivité**. Soient $U, U' : \mathrm{Gal}(K_\infty/E) \to \mathrm{GL}_d(K_\infty)$ (*resp.* $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{K_\infty})$) deux cocycles continus et $B \in \mathrm{GL}_d(\widehat{K_\infty})$ (*resp.* $B \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K_\infty}})$) tel que $U'_\sigma = B^{-1}U_\sigma\sigma(B)$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_\infty/E)$. On peut supposer par (3.2.6) que U, U' prennent des valeurs dans un certain $\mathrm{GL}_d(K_n)$. Alors les coefficients de B engendrent un K_n-sous-espace de $\widehat{K_\infty}$ de dimension finie stable par Γ_K et ce sous-espace est contenu dans K_∞ (3.2.3), donc $B \in \mathrm{GL}_d(K_\infty)$ (*resp.* $B \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{K_\infty})$). □

3.7.2 - Lemme. *Soit c_n comme dans (3.6.6, ii) et soit $\delta > 0$. Soient $A \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K_\infty}})$ et $R \in \mathrm{GL}_d(K_n)$ telles que*

$$v_p(A-1) \geq 2c_n + \delta, \quad \textit{et} \quad v_p(A-R) \geq 4c_n + \delta.$$

Alors il existe $B \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K_\infty}})$ et $R' \in \mathrm{GL}_d(K_n)$ telles que $A' = B^{-1}A\gamma_n(B)$ vérifie

$$v_p(A'-1) \geq 2c_n + \delta, \quad v_p(A'-R') \geq v_p(A-R) + \delta \quad \textit{et} \quad v_p(B-1) \geq v_p(A-R) - 2c_n.$$

Démonstration. D'après (3.6.6), on peut écrire $A = R' + (\gamma_n - 1)(S)$ avec $R' \in \mathrm{Mat}_d(K_n)$ et $S \in \mathrm{Mat}_d(X_n)$. Montrons que $B = 1 - S$ et R' nous conviennent.

D'abord, la matrice B (*resp.* R') appartient à $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K_\infty}})$ (*resp.* $\mathrm{GL}_d(K_n)$). En effet, par (3.6.6, ii), on a

$$\begin{aligned} v_p(A-R) &= v_p\big(R' - R + (\gamma_n - 1)(S)\big) \\ &\leq v_p\big((\gamma_n - 1)(R' - R) + (\gamma_n - 1)^2(S)\big) \\ &= v_p\big((\gamma_n - 1)^2(S)\big) \leq v_p(S) + 2c_n, \end{aligned}$$

puis par hypothèse

$$v_p(S) \geq v_p(A-R) - 2c_n \geq 2c_n + \delta > 0. \tag{3.7.2.1}$$

Donc $B = 1 - S \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K_\infty}})$ par (3.5.2). On a aussi

$$v_p(R' - 1) \geq \min\{v_p(A-1), v_p(S)\} \geq 2c_n + \delta > 0,$$

d'où $R' \in \mathrm{GL}_d(K_n)$ par (3.5.2).

Ensuite, en tenant compte de (3.7.2.1) et de la définition de R' et S, on obtient

$$\begin{aligned} A' = B^{-1}A\gamma_n(B) &= \big(\textstyle\sum_{i\geq 0} S^i\big)(1 + A - 1)\big(1 - \gamma_n(S)\big) \\ &= A + S - \gamma_n(S) + [v_p \geq \min\{2v_p(S), v_p(S) + v_p(A-1)\}] \\ &= R' + [v_p \geq v_p(A-R) + \delta]. \end{aligned}$$

où $[v_p \geq *]$ signifie le reste de valuation $\geq *$. On vérifie finalement que $v_p(A'-1) \geq \min\{v_p(R'-1), v_p(A-R) + \delta\} \geq 2c_n + \delta$, ce qui permet de conclure. □

3.7.3 - Lemme. *Soit c_n comme dans (3.6.6, ii). Soit $\delta > 0$. Soit $A \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K_\infty}})$ telle que $v_p(A-1) \geq 4c_n + \delta$. Alors il existe $B \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K_\infty}})$ telle que $A' = B^{-1}A\gamma_n(B)$ appartienne à $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{K_n})$.*

Démonstration. De façon similaire que dans la preuve de (3.5.5), en appliquant (3.7.2) inductivement (à partir de $R_0 = 1$), on obtient $B_n, R_n \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K_\infty}})$, $n \geq 1$ telles que $A_n = (B_1 \cdots B_n)^{-1}A\gamma_n(B_1 \cdots B_n)$ vérifient

$$v_p(A_n - 1) \geq 2c_n + \delta, \quad v_p(A_n - R_n) \geq 4c_n + (n+1)\delta \quad \text{et} \quad v_p(B_n - 1) \geq 2c_n + n\delta.$$

Le produit $B_1 \cdots B_n$ converge alors vers une matrice $B \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K_\infty}})$ dont l'inverse est la limite de $(B_1 \cdots B_n)^{-1}$. Donc $A' = B^{-1}A\gamma_n(B) = \lim A_n = \lim R_n \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K_\infty}}) \cap \mathrm{Mat}_d(K_n) = \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{K_n})$ par la deuxième estimation et la complétude de K_n. □

Démonstration de (3.7.1). **Surjectivité.** Soit $U : \mathrm{Gal}(K_\infty/E) \to \mathrm{GL}_d(\widehat{K_\infty})$ un cocycle continu. Comme $\lim_{n\to+\infty} \gamma_n = 1$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A = U_{\gamma_n}$ vérifie la condition de (3.7.3), donc il existe $B \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K_\infty}})$ telle que le cocycle $U'_\sigma = B^{-1}U_\sigma\sigma(B)$ vérifie $U'_{\gamma_n} \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{K_n})$. Donc $U'_\tau \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{K_n})$ pour tout $\tau \in \mathrm{Gal}(K_\infty/K_n)$ par continuité et la condition de cocycle, puisque γ_n en est un générateur topologique. Maintenant, pour tous $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_\infty/E)$, $\tau \in \mathrm{Gal}(K_\infty/K_n)$, il existe $\tau' \in \mathrm{Gal}(K_\infty/K_n)$ tel que $\sigma\tau' = \gamma_n\sigma$ car par hypothèse, $\mathrm{Gal}(K_\infty/K_n)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Gal}(K_\infty/E)$; la condition de cocycle implique

$$U'_\sigma\sigma(U'_{\tau'}) = U'_{\sigma\tau'} = U'_{\tau\sigma} = U'_\tau\tau(U'_\sigma).$$

On en déduit que le K_n-espace engendré par les coefficients de U'_σ est stable par $\mathrm{Gal}(K_\infty/K_n)$, donc (3.2.3) on a $U'_\sigma \in \mathrm{GL}_d(K_\infty)$. Si de plus le cocycle U prend des valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K_\infty}})$, comme $B \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K_\infty}})$, le cocycle U' prend des valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{K_\infty})$. □

3.8 Représentations entières

3.8.1. On peut associer à un objet $M \in \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_\mathbf{C}}(\mathcal{G}_K)$ les espaces suivants

— $V = M \otimes_{\mathcal{O}_\mathbf{C}} \mathbf{C} \in \mathrm{Rep}_\mathbf{C}(\mathcal{G}_K)$,

— $V_\infty = (V^{\mathcal{G}_{K_\infty}})^{\mathrm{f}} = D_{\mathrm{Sen}}(V) \in \mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma_K)$; on a $V \simeq V_\infty \otimes_{K_\infty} \mathbf{C}$ dans $\mathrm{Rep}_\mathbf{C}(\mathcal{G}_K)$ (3.2.7),

— $M_\infty = V_\infty \cap M = (M^{\mathcal{G}_{K_\infty}})^{\mathcal{O}_K\text{-f}}$ (3.2.9), muni d'une action continue $\mathcal{O}_{K_\infty}$-semi-linéaire de Γ_K.

Le $\mathcal{O}_{K_\infty}$-module M_∞ n'est pas nécessairement libre de rang fini ; on en verra un exemple (4.2.6). L'application naturelle

$$M_\infty \otimes_{\mathcal{O}_{K_\infty}} \mathcal{O}_\mathbf{C} \to M \tag{3.8.1.1}$$

est injective ; en effet, sa composée avec $M \subset V$ est égale à la composée

$$M_\infty \otimes_{\mathcal{O}_{K_\infty}} \mathcal{O}_\mathbf{C} \hookrightarrow M_\infty \otimes_{\mathcal{O}_{K_\infty}} \mathbf{C} = (M_\infty \otimes_{\mathcal{O}_{K_\infty}} K_\infty) \otimes_{K_\infty} \mathbf{C} \simeq V_\infty \otimes_{K_\infty} \mathbf{C} = V,$$

la première flèche est injective car M_∞ est un $\mathcal{O}_{K_\infty}$-plat par le lemme suivant (3.8.1.2), et l'isomorphisme résulte du fait que M_∞ contient une K_∞-base de V_∞.

3.8.1.2 - Lemme. *Soit E un corps valué. Alors tout $\mathcal{O}_E$-module sans torsion est plat.*

Démonstration. Soit N un $\mathcal{O}_E$-module sans torsion. Pour montrer la platitude de N, il suffit de montrer pour tout idéal $I \subset \mathcal{O}_E$ l'injectivité de l'application naturelle $I \otimes_{\mathcal{O}_E} N \to N$. Si l'image de $\sum_i a_i \otimes x_i \neq 0$ s'annule, prenons $a_{i_0} \neq 0$ dont la valuation est la plus petite parmi celles des a_i, alors $a_i \in \mathcal{O}_E a_{i_0}$, donc $\sum_i a_i \otimes x_i = a_{i_0} \otimes x$ pour un $x \in N$. Donc $a_{i_0} x = 0$, puis $x = 0$ car N est sans torsion et $a_{i_0} \neq 0$, absurde. □

3.8.2 - Théorème. *Pour tout $M \in \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_{\mathbf{C}}}(\mathscr{G}_K)$, le $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$-module $M/(M_\infty \otimes_{\mathcal{O}_{K_\infty}} \mathcal{O}_{\mathbf{C}})$ est annulé par $\mathfrak{m}_{\mathbf{C}}$.*

3.8.3. Commençons par un résultat similaire. Soit $E/\mathbf{Q}_p$ une extension finie. Soit F/E une extension galoisienne finie avec groupe de Galois G.

À tout $M \in \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_F}(G)$ de rang fini d, on associe les espaces suivants en parallèle avec (3.8.1)

— $V = M \otimes_{\mathcal{O}_F} F \in \mathrm{Rep}_F(G)$,

— $V^G = \{v \in V : g(v) = v, \forall g \in G\}$; on a $V \simeq V^G \otimes_E F$ dans $\mathrm{Rep}_F(G)$ (2.3.1),

— $M^G = \{m \in M : g(m) = m, \forall g \in G\} = V^G \cap M$.

Le $\mathcal{O}_E$-module M^G est libre de rang d. En effet, $\mathcal{O}_F$ étant un $\mathcal{O}_E$-module libre de rang fini (1.3.3), M est aussi un $\mathcal{O}_E$-module libre de rang fini, ayant M^G comme un $\mathcal{O}_E$-sous-module. Comme $\mathcal{O}_E$ est un anneau principal, M^G est alors libre de rang fini. De plus, comme M^G contient une E-base de V^G, on a $M^G \otimes_{\mathcal{O}_E} E \simeq V^G$, donc $\mathrm{rg}_{\mathcal{O}_E}(M^G) = d$. Ainsi M^G admet une $\mathcal{O}_E$-base qui est aussi une F-base de V. L'application naturelle

$$M^G \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_F \to M$$

est injective par le même argument que pour (3.8.1.1).

3.8.4 - Proposition. *Gardons les notations de (3.8.3). Pour tout $M \in \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_F}(G)$ de rang d, le $\mathcal{O}_F$-module $M/(M^G \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_F)$ est annulé par $(\mathfrak{D}_{F/E} \cap \mathcal{O}_E)^{d-1}\mathfrak{m}_E^d$.*

Démonstration. Soit u un générateur de l'idéal $\mathfrak{D}_{F/E} \cap \mathcal{O}_E \subset \mathcal{O}_E$. Montrons par récurrence sur $d = \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_F}(M) \geq 1$ que $M/(M^G \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_F)$ est annulé par $u^{d-1}\pi_E^d$. Lorsque $d = 1$, si $\pi_E M \not\subset M^G \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_F$, on aurait l'inclusion inverse, alors $M \supset \pi^{-1} M^G$, puis $M^G \supset \pi^{-1} M^G$ en prenant les G-invariants, absurde. Cela étant fait, supposons maintenant $d > 1$. Il y a une suite exacte dans $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_F}(G)$

$$0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$$

avec $\mathrm{rg}_{\mathcal{O}_F}(M_1) = d-1$ et $\mathrm{rg}_{\mathcal{O}_F}(M_2) = 1$, puisque M^G a une $\mathcal{O}_E$-base qui est aussi une F-base de V. On obtient alors une suite exacte

$$0 \to M_1^G \to M^G \to N \to 0$$

avec $N = \ker(M_2^G \to H^1(G, M_1))$ (2.2.6). En tensoriant cette suite par $\mathcal{O}_F$ et en appliquant le lemme du serpent, on obtient une suite exacte

$$0 \to M_1/(M_1^G \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_F) \to M/(M^G \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_F) \to M_2/(N \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_F) \to 0.$$

Le terme à gauche est annulé par $u^{d-2}\pi_E^{d-1}$ par récurrence. Le terme à droite est annulé par $u\pi_E$: dans la suite exacte

$$0 \to H^1(G, M_1) \to M_2/(N \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_F) \to M_2/(M_2^G \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_F) \to 0,$$

le troisième terme est annulé par π_E selon le cas $d = 1$, et le premier terme est annulé par u :

3.8.4.1 - Lemme. *On a $u \cdot H^1(G, M_1) = 0$.*

Démonstration. Il existe $x \in \mathfrak{D}_{F/E}^{-1}$ tel que $\mathrm{Tr}_{F/E}(x) = 1$ par définition. On a alors $u = \mathrm{Tr}_{F/E}(ux)$ avec $ux \in \mathfrak{D}_{F/E}\mathfrak{D}_{F/E}^{-1} = \mathcal{O}_F$. Maintenant, pour tout cocycle $c : G \to M_1$, posons $b = \sum_{g \in G} g(ux)c_g \in M_1$. On a

$$g'(b) = \sum_{g \in G} g'g(ux)g'(c_g) = \sum_{g \in G} g'g(ux)(c_{g'g} - c_{g'}) = b - \mathrm{Tr}_{F/E}(ux)c_{g'} = b - uc_{g'}$$

pour $g' \in G$. Donc $uc = \partial(-b)$ est un cobord. □

En combinant ce qui précède, $M/(M^G \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_F)$ est annulé par $u^{d-2}\pi_E^{d-1} \cdot u \cdot \pi_E = u^{d-1}\pi_E^d$. □

3.8.5 - Lemme. *Les applications naturelles*

$$\varinjlim_n H^1(\Gamma_K, \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{K_n})) \to H^1(\Gamma_K, \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{K_\infty}}))$$
$$\varinjlim_L H^1(\mathrm{Gal}(L_\infty/K), \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_L)) \to H^1(\mathcal{G}_K, \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\mathbf{C}}))$$

sont bijectives, où L parcourt les extensions galoisiennes finies de K et $L_\infty = LK_\infty$.

Démonstration. L'injectivité résulte de la preuve de l'injectivité de (3.7.1). La surjectivité de la première résulte de (3.7.1) et (3.2.6). On sait que toute extension galoisienne finie de K_∞ est de la forme L_∞ avec L/K une extension finie galosienne d'après le début de la preuve de (1.8.2). Alors la surjectivité de la deuxième découle de (3.5.1, ii), (3.7.1) et (3.2.6) appliqués à $K := L$, $K_\infty := L_\infty$ et $E := K$. □

Démonstration de (3.8.2). Soit $M \in \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_{\mathbf{C}}}(\mathcal{G}_K)$ de rang d. Par (3.8.5), il existe une extension galoisienne finie L/K et une $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$-base $\mathbf{e}$ de M telles que la représentation soit décrite par un cocycle

$$U : \mathcal{G}_K \to \mathrm{Gal}(L_\infty/K) \to \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_L) \subset \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\mathbf{C}}).$$

Notons $L_n = LK_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Notons P_n le $\mathcal{O}_{L_n}$-sous-module de M engendré par la base $\mathbf{e}$, on a $P_n \in \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_{L_n}}(\mathcal{G}_K)$ de rang d et $M = P_n \otimes_{\mathcal{O}_{L_n}} \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$. En appliquant (3.8.4) à $E = K_n$ et $F = L_n$, on obtient que $P_n/(P_n^{\mathrm{Gal}(L_n/K_n)} \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} \mathcal{O}_{L_n})$ est annulé par $(\mathfrak{D}_{L_n/K_n} \cap \mathcal{O}_{K_n})^{d-1}\mathfrak{m}_{K_n}^d$. Posons

$$M_n = P_n^{\mathrm{Gal}(L_n/K_n)} \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} \mathcal{O}_{K_\infty}.$$

C'est une $\mathcal{O}_{K_\infty}$-représentation semi-linéaire de Γ_K libre de rang d (3.8.3), où Γ_K agit via $\mathrm{Gal}(K_n/K)$ sur $P_n^{\mathrm{Gal}(L_n/K_n)}$ et naturellement sur $\mathcal{O}_{K_\infty}$.

D'une part, comme les éléments de $P_n^{\mathrm{Gal}(L_n/K_n)}$ sont fixés par $\mathcal{G}_{K_n} \supset \mathcal{G}_{K_\infty}$ et sont K-finis (car c'est un $\mathcal{O}_{K_n}$-module libre de rang fini stable par $\mathcal{G}_K$), on a l'inclusion $M_n \subset M_\infty$.

D'autre part, on a l'inclusion

$$M_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_\infty}} \mathcal{O}_{\mathbf{C}} = (P_n^{\mathrm{Gal}(L_n/K_n)} \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} \mathcal{O}_{L_n}) \otimes_{\mathcal{O}_{L_n}} \mathcal{O}_{\mathbf{C}} \hookrightarrow P_n \otimes_{\mathcal{O}_{L_n}} \mathcal{O}_{\mathbf{C}} = M$$

signifiant que $M_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_\infty}} \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ est une $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$-sous-représentation de M, et le conoyau est annulé par $(\mathfrak{D}_{L_n/K_n} \cap \mathcal{O}_{K_n})^{d-1}\mathfrak{m}_{K_n}^d$. La valuation de ce dernier est (1.5.5)

$$(d-1)v_K(\mathfrak{D}_{L_n/K_n} \cap \mathcal{O}_{K_n}) + d v_K(\mathfrak{m}_{K_n}) = (d-1)\lceil e(K_n/K)v_K(\mathfrak{D}_{L_n/K_n})\rceil e(K_n/K)^{-1} + de(K_n/K)^{-1}$$

qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, puisque $e(K_n/K)$ est d'ordre p^n à une constante près, et que la suite $\left(p^n v_K(\mathfrak{D}_{L_n/K_n})\right)_n$ est bornée (1.8.2.3).

On en conclut que le $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$-module $M/(M_\infty \otimes_{\mathcal{O}_{K_\infty}} \mathcal{O}_{\mathbf{C}})$ est annulé par les éléments de $\mathcal{O}_{K_\infty}$ de valuation arbitrairement petite, en particulier annulé par $\mathfrak{m}_{\mathbf{C}}$. □

Dans cette preuve, on a en fait montré l'énoncé plus fort suivant :

3.8.6 - Corollaire. *Soit $M \in \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_{\mathbf{C}}}(\mathcal{G}_K)$. Il existe une suite $(a_n)_n$ dans $\mathcal{O}_{K_\infty}$ avec $\lim_{n\to+\infty} v_K(a_n) = 0$ et $M_n \in \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_{K_\infty}}(\Gamma_K)$ contenus dans M_∞ et de même rang que M tels que $M_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_\infty}} \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ soit identifié à une $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$-sous-représentation de M, et que $a_n M \subset M_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_\infty}} \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$.* □

4 Décomposition de Hodge-Tate

4.1 Modules des differentielles

Cette partie a pour but de préparer la démonstration de (4.2.2).

4.1.1 - Définition. Soient A un anneau (unitaire commutatif), B une A-algèbre (unitaire commutative).

(i) Étant donné un B-module M, on appelle A-dérivation de B dans M une application A-linéaire $D : B \to M$ vérifiant $D(xy) = xD(y) + yD(x)$ pour $x, y \in B$. On notera $\mathrm{Der}_A(B, M)$ l'ensemble des A-dérivations de B dans M.

(ii) Un *module des 1-différentielles* (ou simplement *des différentielles*) *de B par rapport à A* est un B-module $\Omega^1_{B/A}$ muni d'une *dérivation universelle* $d^{un} \in \mathrm{Der}_A(B,\Omega^1_{B/A})$ qui vérifie la propriété universelle suivante : pour tout B-module M, l'application naturelle

$$\mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A},M) \to \mathrm{Der}_A(B,M), \quad f \mapsto f \circ d^{un} \tag{4.1.1.1}$$

est bijective.

4.1.2 - Remarque. (i) La propriété universelle implique l'unicité (à unique isomorphisme près) d'un tel module $\Omega^1_{B/A}$. Concernant son existence, posons $\Omega^1_{B/A} = (\bigoplus_{b\in B} B\cdot db)/N$ où $B\cdot db$ signifie un B-module libre de rang 1 de base $\{db\}$, et N est le B-sous-module engendré par les $d(ax)-adx$, $d(x+y)-dx-dy$ et $d(xy)-xdy-ydx$ pour $a \in A$, $x,y \in B$. Alors $\Omega^1_{B/A}$ est un B-module, et l'application $d^{un} : B \to \Omega^1_{B/A}$, $b \to db$ est une A-dérivation bien définie. Le couple $(\Omega^1_{B/A},d^{un})$ vérifie la propriété universelle (4.1.1.1).

(ii) Si on se donne un diagramme commutatif de morphismes d'anneaux

$$\begin{tikzcd} B' & B \arrow[l] \\ A' \arrow[u] & A \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

il existe un unique morphisme de B-modules $\Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{B'/A'}$ qui correspond à la A-dérivation $B \to B' \to \Omega^1_{B'/A'}$. Avec la construction explicite de (i), on a $\Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{B'/A'}$, $b_1\cdot db_2 \mapsto b_1\cdot db_2$, les deux db_2 étant généralement différentes.

Par conséquent, si $G\times B \to B$, $(g,b) \mapsto g(b)$ est une action d'un groupe G sur une A-algèbre B par automorphismes de A-algèbre, alors G agit naturellement sur $\Omega^1_{B/A}$ par $(g,b_1\cdot db_2) \mapsto g(b_1)\cdot dg(b_2)$; en effet, pour chaque $g\in G$, on peut prendre $A'=A$, $B'=B$ et $B\to B'$, $b\to g(b)$.

4.1.3 - Proposition. *Le module des différentielles a les propriétés suivantes :*

(i) Changement de base : pour toute A-algèbre C, $\Omega^1_{B\otimes_A C/C} \simeq \Omega^1_{B/A}\otimes_A C$.

(ii) Localisation : pour tout sous-ensemble multiplicatif $S\subset B$, $\Omega^1_{S^{-1}B/A} \simeq S^{-1}\Omega^1_{B/A}$.

(iii) Transitivité : si B est une A-algèbre, C est une B-algèbre (et devient naturellement une A-algèbre), on a une suite exacte de C-modules $C\otimes_B \Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{C/A} \to \Omega^1_{C/B} \to 0$.

(iv) Si le morphisme de A-algèbres $B\to C$ est surjectif avec noyau I, alors on a une suite exacte de C-modules $C\otimes_B I \to C\otimes_B \Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{C/A} \to 0$.

(v) Si $B = \varinjlim B_i$ est la limite inductive filtrante d'une famille de A-algèbres, alors $\Omega^1_{B/A} = \varinjlim \Omega^1_{B_i/A}$.

4.1.4 - Exemples. (i) Soit $B = A[X_1,\dots,X_n]$ la A-algèbre des polynômes à n variables. Alors $\Omega^1_{B/A} = \bigoplus_i B\cdot dX_i$ est un B-module libre, et d^{un} est donnée par $f\mapsto \sum_i(\partial f/\partial X_i)dX_i$.

Soit maintenant $C = B/I$ où I est un idéal de B engendré par un nombre fini d'éléments $f_1,\dots,f_r\in B$. En appliquant (4.1.3, iv), on peut décrire $\Omega^1_{C/A}$ comme le quotient de $\Omega^1_{B/A}$ par le B-sous-module engendré par les $d^{un}f_1,\dots,d^{un}f_r$.

(ii) Soient $K\subset L$ des extensions finies de $\mathbf{Q}_p$. On obtient des modules des différentielles $\Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}$ et $\Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}$, munis respectivement de l'action naturelle de $\mathrm{Gal}(L/K)$ et $\mathscr{G}_K$ par fonctorialité (4.1.2, ii).

Soit $x\in L$ tel que $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[x]$ et soit $f\in\mathcal{O}_K[X]$ le polynôme minimal de x sur K. Comme K est de caractéristique 0, on a $f'(x)\neq 0$. Notons $d_{L/K}$ la dérivation universelle de $\mathcal{O}_L$ par rapport à $\mathcal{O}_K$. Selon (i), on a $\Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} = \mathcal{O}_L\cdot d_{L/K}x$ et l'annulateur de $d_{L/K}x$ est $\mathrm{Ann}(d_{L/K}x) = f'(x)\mathcal{O}_L$. On sait (1.5.4, ii) que $f'(x)\mathcal{O}_L$ est égal à la différente $\mathfrak{D}_{L/K}$ de l'extension L/K. On obtient ainsi

$$\Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} \simeq \mathcal{O}_L/\mathfrak{D}_{L/K}, \quad \mathrm{Ann}(\Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}) = \mathrm{Ann}(d_{L/K}x) = \mathfrak{D}_{L/K} \neq 0. \tag{4.1.4.1}$$

4.1.5 - Proposition. *Soient $K\subset L$ des extensions finies de $\mathbf{Q}_p$.*

(i) L'extension L/K est non ramifiée si et seulement si $\Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} = 0$.

(ii) Si π_L est une uniformisante de $\mathcal{O}_L$, on a $\Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} = \mathcal{O}_L\cdot d_{L/K}\pi_L$.

(iii) Soit L' une extension finie de L. L'inclusion $\mathcal{O}_L\subset\mathcal{O}_{L'}$ induit une application $\iota : \Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} \to \Omega^1_{\mathcal{O}_{L'}/\mathcal{O}_K}$. Si $\omega\in\Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}$, on a $\mathrm{Ann}(\iota(\omega)) = \mathcal{O}_{L'}\cdot\mathrm{Ann}(\omega)$. En particulier, ι est injective.

(iv) Soit K'/K une sous-extension de L/K. Notons $\varepsilon : \Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} \to \Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_{K'}}$ l'application naturelle. Alors pour tout $\omega\in\Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}$ on a

$$v(\mathrm{Ann}(\varepsilon(\omega))) = \max\{0, v(\mathrm{Ann}(\omega)) - v(\mathfrak{D}_{K'/K})\}.$$

Démonstration. (i) Il suffit d'appliquer (1.5.4, iii).

(ii) Soit L_0/K la sous-extension maximale non ramifiée de L/K. On a $\Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_{L_0}} = \mathcal{O}_L \cdot d_{L/L_0}\pi_L$ car $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_{L_0}[\pi_L]$ (1.3.2). D'autre part, on a $\Omega^1_{\mathcal{O}_{L_0}/\mathcal{O}_K} = 0$ selon (i). Alors d'après (4.1.3, iii), l'application $\Omega^1_{\mathcal{O}_L/K} \to \Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_{L_0}}$ qui envoie $d_{L/K}\pi_L$ à $d_{L/L_0}\pi_L$ est bijective, d'où le (ii).

(iii) Par dévissage, on peut supposer que l'extension L'/L est soit non ramifiée, soit totalement ramifiée. Grâce aux valuations discrètes sur $\mathcal{O}_{L'}$ et $\mathcal{O}_L$, il suffit de montrer l'égalité des valuations $v(\mathrm{Ann}(\iota(\omega))) = v(\mathrm{Ann}(\omega))$.

Si L'/L est ***non ramifiée***, choisissons une uniformisante π_L de $\mathcal{O}_L$, qui est aussi une uniformisante de $\mathcal{O}_{L'}$. On a $\mathrm{Ann}(d_{L/K}\pi_L) = \mathfrak{D}_{L/K}$ et $\mathrm{Ann}(d_{L'/K}\pi_L) = \mathfrak{D}_{L'/K} = \mathfrak{D}_{L'/L}\mathfrak{D}_{L/K} = \mathcal{O}_{L'}\mathfrak{D}_{L/K}$ (1.5.4).

Soit $\omega \in \Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}$. Écrivons $\omega = a \cdot d_{L/K}\pi_L$ avec $a \in \mathcal{O}_L$ selon (b). On a $\iota(\omega) = a \cdot d_{L'/K}\pi_L \in \Omega^1_{\mathcal{O}_{L'}/\mathcal{O}_K}$, donc $v(\mathrm{Ann}(\omega)) = \max\{0, v(\mathfrak{D}_{L/K}) - v(a)\}$ et $v(\mathrm{Ann}(\iota(\omega))) = \max\{0, v(\mathfrak{D}_{L'/K}) - v(a)\} = \max\{0, v(\mathfrak{D}_{L/K}) - v(a)\}$, d'où l'égalité entre elles.

Si L'/L est ***totalement ramifiée***, on choisit une uniformisante $\pi_{L'}$ de L' ; son polynôme minimal sur L est un polynôme d'Eisenstein $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathcal{O}_L[X]$, et on a $\mathcal{O}_{L'} = \mathcal{O}_L[\pi_{L'}]$ (1.3.2). On pose $\pi_L = -a_0$ qui est une uniformisante de K. On a

$$d_{L'/K}\pi_L = P'(\pi_{L'}) \cdot d_{L'/K}\pi_{L'} + \pi_{L'}^{n-1} \cdot d_{L'/K}a_{n-1} + \cdots + \pi_{L'} \cdot d_{L'/K}a_1.$$

Comme $a_i \in \mathcal{O}_L$, les termes $d_{L'/K}a_i$ sont l'image des $d_{L/K}a_i \in \Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} = \mathcal{O}_L \cdot d_{L/K}\pi_L$, alors il existe $x \in \mathcal{O}_{L'}$ tel que

$$(1 - \pi_{L'}x) \cdot d_{L'/K}\pi_L = P'(\pi_{L'}) \cdot d_{L'/K}\pi_{L'}.$$

On a $1 - \pi_{L'}x \in \mathcal{O}_{L'}^\times$. Comme on a $\mathrm{Ann}(d_{L'/K}\pi_{L'}) = \mathfrak{D}_{L'/K} = \mathfrak{D}_{L'/L}\mathfrak{D}_{L/K} = \mathfrak{D}_{L'/L} \cdot \mathrm{Ann}(d_{L/K}\pi_L)$ (1.5.4, i) et $\mathfrak{D}_{L'/L} = P'(\pi_{L'})\mathcal{O}_{L'}$ (1.5.4, ii), on obtient

$$v(\mathrm{Ann}(d_{L'/K}\pi_L)) = v(\mathrm{Ann}(d_{L/K}\pi_L))$$

ce qui permet de conclure comme dans le cas où L'/L est non ramifiée.

(iv) L'application ε est surjective (4.1.3, iii). Si π_L est une uniformisante de $\mathcal{O}_L$, on a $\Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} = \mathcal{O}_L \cdot d_{L/K}\pi_L$, $\Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_{K'}} = \mathcal{O}_L \cdot d_{L/K'}\pi_L$ et $\varepsilon(d_{L/K}\pi_L) = d_{L/K'}\pi_L$. L'application s'identifie alors au quotient $\mathcal{O}_L/\mathcal{D}_{L/K} \to \mathcal{O}_L/\mathcal{D}_{L/K'}$, dont le noyau est égal à $\mathcal{O}_L \cdot \mathfrak{D}_{K'/K}$. On obtient alors

$$v(\mathrm{Ann}(d_{L/K'}\pi_L)) = \max\{0, v(\mathrm{Ann}(d_{L/K}\pi_L)) - v(\mathrm{Ann}(\mathfrak{D}_{K'/K}))\}$$

ce qui permet de conclure comme dans (iii). □

4.1.6. Les modules $\Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}$ forment un système inductif où L parcourt les extensions finies de K, dont les applications de transition sont injectives d'après (iii). Sa limite est $\Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K} = \varinjlim \Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}$ car on a $\varinjlim \mathcal{O}_L = \mathcal{O}_{\overline{K}}$, et les applications canoniques $\Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} \to \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}$ sont injectives.

Soit $\omega \in \Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}$. Son annulateur $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}(\omega)$ est un idéal principal non nul de $\mathcal{O}_L$. Il résulte de (iii) que l'annulateur de ω dans le $\mathcal{O}_{\overline{K}}$-module $\Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}$ est égal à $\mathfrak{a}' = \mathcal{O}_{\overline{K}}\mathfrak{a}$; en particulier, $\mathfrak{a}'$ est un idéal principal non nul de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$, et $a \in \mathfrak{a}'$ si et seulement si $v(a) \geq v(\mathfrak{a}') = v(\mathfrak{a})$ pour $a \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$.

Si $x \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$, il existe une extension finie L/K telle que $x \in \mathcal{O}_L$. On notera $d_{L/K}x$ sa différentielle dans $\Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}$, et dx sa différentielle dans $\Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}$.

4.2 Un théorème de Fontaine

Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. On se propose de décrire le module des différentielles $\Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}$.

Soit $E/\mathbf{Q}_p$ une sous-extension de $K/\mathbf{Q}_p$. Soient $q = \# k_E$ et $\pi = \pi_E$ une uniformisante de $\mathcal{O}_E$. Soient $\mathcal{F}$ un groupe formel de Lubin-Tate sur $\mathcal{O}_E$ et $\Omega_{\mathcal{F}}$ le $\mathcal{O}_E$-module des formes différentielles invariantes sur $\mathcal{F}$. Soit K_0/E la sous-extension maximale non ramifiée de K/E.

4.2.1. Construction. Définissons un accouplement

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathfrak{m}_{\overline{E}}) \times \Omega_{\mathcal{F}} &\to \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K} \\ (u, \omega = \alpha(X)dX) &\mapsto u^*\omega = \alpha(u)du. \end{aligned} \tag{4.2.1.1}$$

Il est $\mathcal{O}_E$-linéaire par rapport à ω. Comme ω est à coefficients dans E, on a $g(u^*\omega) = g(\alpha(u)du) = \alpha(g(u))d(g(u)) = g(u)^*\omega$ pour tout $g \in \mathcal{G}_K$. On a $(u \oplus u')^*\omega = u^*\omega + u'^*\omega$ selon (1.6.11.1) et $([a]u)^*\omega = u^*(a\omega)$ selon (1.6.11.3).

Définissons une application

$$\begin{aligned} \xi = \xi_{K,\mathcal{F}} : \overline{K} \otimes_{\mathcal{O}_E} T_\pi(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_E} \Omega_{\mathcal{F}} &\to \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K} \\ \pi^{-r} a \otimes u \otimes \omega &\mapsto a \cdot u_r^* \omega \end{aligned} \tag{4.2.1.2}$$

où $r \in \mathbb{N}$, $a \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$, $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un générateur de $T_\pi(\mathcal{F})$ et ω est un générateur de $\Omega_{\mathcal{F}}$. L'application ξ est bien définie ; en effet, grâce à la $\mathcal{O}_E$-linéarité de (4.2.1.1), on se ramène à l'ambiguïté $\pi^{-r'}a' = \pi^{-r}a$ avec $r' \in \mathbb{N}$, $a' \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$ et par exemple $r' > r$; dans ce cas, on a $a' = a\pi^{r'-r}$ et puis $a' \cdot u_{r'}^*\omega = a \cdot (\pi^{r'-r}u_{r'})^*\omega = a \cdot u_r^*\omega$ par la $\mathcal{O}_E$-linéarité de (4.2.1.1). Aussi par cette $\mathcal{O}_E$-linéarité, on voit que ξ ne dépend pas des générateurs u et ω choisis. Il est clair que ξ est $\mathcal{O}_{\overline{K}}$-linéaire.

On fait agir $\mathcal{G}_K$ trivialement sur $\Omega_{\mathcal{F}}$, de façon naturelle sur $T_\pi(\mathcal{F})$ (1.6.5) via l'inclusion $\mathcal{G}_K \subset \mathcal{G}_E$ et l'action de $\mathcal{G}_E$, et aussi naturellement sur $\overline{K}$. On obtient une action semi-linéaire et continue de $\mathcal{G}_K$ sur $\overline{K} \otimes_{\mathcal{O}_E} T_\pi(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_E} \Omega_{\mathcal{F}}$, et ξ est alors une application $\mathcal{G}_K$-équivariante.

4.2.2 - Théorème (Fontaine). *L'application ξ est surjective et son noyau est le $\mathcal{O}_{\overline{K}}$-sous-module $\mathfrak{a} \otimes_{\mathcal{O}_E} T_\pi(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_E} \Omega_{\mathcal{F}}$ de $\overline{K} \otimes_{\mathcal{O}_E} T_\pi(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_E} \Omega_{\mathcal{F}}$, où*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{K,\mathcal{F}} = \{a \in \overline{K} : v_E(a) \geq -v_E(\mathfrak{D}_{K/K_0}) - \frac{1}{q-1}\}.$$

Démonstration. Comme $T_\pi(\mathcal{F})$ et $\Omega_{\mathcal{F}}$ sont des $\mathcal{O}_E$-modules libres, donc plats, $\mathfrak{a} \otimes_{\mathcal{O}_E} T_\pi(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_E} \Omega_{\mathcal{F}}$ est bien un $\mathcal{O}_{\overline{K}}$-sous-module de $\overline{K} \otimes_{\mathcal{O}_E} T_\pi(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_E} \Omega_{\mathcal{F}}$.

Soit ω_0 un générateur de $\Omega_{\mathcal{F}}$ et soit $u = (u_n)$ un générateur de $T_\pi(\mathcal{F})$. Concernant le noyau, il s'agit de montrer que si $r \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$, alors $\xi(\pi^{-r}a \otimes u \otimes \omega_0) = a \cdot u_r^*\omega_0$ s'annule si et seulement si $v_E(\pi^{-r}a) \geq -v_E(\mathfrak{D}_{K/K_0}) - \frac{1}{q-1}$.

Commençons par calculer la valuation de l'annulateur $\mathrm{Ann}(u_r^*\omega_0)$.

4.2.2.1 - Lemme. *Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a*

$$v_E(\mathrm{Ann}(u_r^*\omega_0)) = \max\{0, r - \frac{1}{q-1} - v_E(\mathfrak{D}_{K/K_0})\}.$$

Démonstration. En appliquant (4.1.5, iv), on se ramène au cas où $K = K_0$ (donc $v_E(\mathfrak{D}_{K/K_0}) = 0$). Si $r = 0$, l'identité devient $0 = 0$. On peut donc supposer $r \geq 1$.

Le générateur ω_0 de $\Omega_{\mathcal{F}}$ s'écrit $\omega_0(X) = (a + b(X))dX$ avec $a \in \mathcal{O}_E^\times$ et $b(X) \in X \cdot \mathcal{O}_E[\![X]\!]$. Le générateur $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $u_n \in \Lambda_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (1.6.5) ; ainsi u_r est une uniformisante de $\mathcal{O}_{E_r}$. On a alors $u_r^*\omega_0 = (a + b(u_r))du_r$ avec $a + b(u_r) \in \mathcal{O}_{E_r}^\times$. Donc $\mathrm{Ann}(u_r^*\omega_0) = \mathrm{Ann}(du_r)$. On sait par ailleurs $v_E(\mathrm{Ann}(du_r)) = v_E(\mathrm{Ann}(d_{KE_r/K}u_r))$ (4.1.5, iii). Il reste donc à calculer cette dernière valuation.

Comme on a supposé $K = K_0$, qui est non ramifiée sur E, et que E_r/E est une extension finie totalement ramifiée avec u_r une uniformisante, l'extension KE_r/K est aussi finie totalement ramifiée avec u_r une uniformisante. Notons $P \in \mathcal{O}_E[X]$ le polynôme minimal de u_r sur E qui est un polynôme d'Eisenstein sur $\mathcal{O}_E$ (1.3.2) ; étant aussi un polynôme d'Eisenstein sur $\mathcal{O}_K$, P est aussi le polynôme minimal de u_r sur K. Donc d'après (4.1.4.1), (1.5.4, ii) et (1.6.10), on a

$$v_E(\mathrm{Ann}(d_{KE_r/K}u_r)) = v_E(\mathfrak{D}_{KE_r/K}) = v_E(P'(u_r)) = v_E(\mathfrak{D}_{E_r/E}) = r - \frac{1}{q-1}$$

ce qui conclut la preuve du lemme. □

Noyau de ξ. Soient $r \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$. Alors $\xi(\pi^{-r}a \otimes u \otimes \omega_0) = a \cdot u_r^*\omega_0$ s'annule si et seulement si $a \in \mathrm{Ann}(u_r^*\omega_0)$, ce qui revient à $v_E(a) \geq v_E(\mathrm{Ann}(u_r^*\omega_0))$ (4.1.6), ou encore $v_E(\pi^{-r}a) \geq \max\{-r, -\frac{1}{q-1} - v_E(\mathfrak{D}_{K/K_0})\}$ par (4.2.2.1). Mais on observe que $v_E(\pi^{-r}a) \geq -r$ car $a \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$, donc finalement, on obtient que $\xi(\pi^{-r}a \otimes u \otimes \omega_0) = 0$ équivaut à $v_E(\pi^{-r}a) \geq -\frac{1}{q-1} - v_E(\mathfrak{D}_{K/K_0})$, ce qui détermine le noyau.

Surjectivité de ξ. Soit $\omega \in \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}$ non nulle. On sait que $\mathrm{Ann}(\omega) \neq 0$ (4.1.6), alors par (4.2.2.1), il existe $r \in \mathbb{N}$ suffisamment grand tel que $u_r^*\omega_0 \neq 0$ et $v_E(\mathrm{Ann}(u_r^*\omega_0)) > v_E(\mathrm{Ann}(\omega))$. Soit L/K une extension finie telle que $u_r^*\omega_0$ et ω viennent respectivement des formes $b \cdot d_{L/K}\pi_L$, $c \cdot d_{L/K}\pi_L \in \Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}$ avec $b, c \in \mathcal{O}_L$ non nuls et π_L une uniformisante de $\mathcal{O}_L$. Si $c \notin b\mathcal{O}_L$, on aurait $b \in c\mathcal{O}_L$, alors $\mathrm{Ann}(b \cdot d_{L/K}\pi_L) \supset \mathrm{Ann}(c \cdot d_{L/K}\pi_L)$, puis $\mathrm{Ann}(u_r^*\omega_0) \supset \mathrm{Ann}(\omega)$ (4.1.6), contredisant l'inégalité de leurs valuations. Donc il existe $a \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$ tel que $c = ab$, et on obtient au final $\omega = ab \cdot d\pi_L = au_r^*\omega_0 = \xi(\pi^{-r}a \otimes u \otimes \omega_0)$. □

4.2.3. Soit A un groupe abélien. Son *module de Tate* est le $\mathbf{Z}_p$-module $T_p(A) = \varprojlim_n A[p^n]$ où $n \in \mathbb{N}$ et $A[p^n]$ est la p^n-torsion de A, et les morphismes de transition sont $p : A[p^{n+1}] \to A[p^n]$.

Soit M un $\mathcal{O}_E$-module. De façon similaire, on définit $T_\pi(M) = \varprojlim_n M[\pi^n]$ où $n \in \mathbb{N}$, $M[\pi^n]$ est la π^n-torsion, et les morphismes de transition sont $\pi : M[\pi^{n+1}] \to M[\pi^n]$. On a l'identification canonique $T_\pi(M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(E/\mathcal{O}_E, M)$, qui associe à $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(E/\mathcal{O}_E, M)$ l'élément $(f(\pi^{-n}))_{n\in\mathbb{N}} \in T_\pi(M)$. Définissons aussi $V_\pi(M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(E, M)$. On a alors une inclusion naturelle de $\mathcal{O}_E$-modules $T_\pi(M) \hookrightarrow V_\pi(M)$. Si M est un $\mathcal{O}_E$-module de torsion, on a $V_\pi(M) = T_\pi(M)[\pi^{-1}]$.

4.2.4 - Corollaire. *Soit $\widehat{\mathfrak{a}} = \widehat{\mathfrak{a}}_{K,\mathcal{F}}$ l'adhérence de $\mathfrak{a}_{K,\mathcal{F}}$ dans $\mathbf{C}$. On a des isomorphismes $\mathcal{G}_K$-équivariants de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$-modules (*resp. *$\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$-modules, $\mathbf{C}$-espaces vectoriels)*

(i) $\Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K} \simeq \overline{K}/\mathfrak{a}_{K,\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_E} T_\pi(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_E} \Omega_{\mathcal{F}}$,

(ii) $T_\pi(\Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}) \simeq \widehat{\mathfrak{a}}_{K,\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_E} T_\pi(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_E} \Omega_{\mathcal{F}}$,

(iii) $V_\pi(\Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}) \simeq \mathbf{C} \otimes_{\mathcal{O}_E} T_\pi(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_E} \Omega_{\mathcal{F}}$.

En particulier, on a un isomorphisme $V_\pi(\Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}) \simeq \mathbf{C}(\chi_\pi)$ de $\mathbf{C}$-représentations de $\mathcal{G}_K$.

Démonstration. Le (i) résulte de (4.2.2).

Notons pour simplicité $\Omega_K = \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}$. Les $\mathcal{O}_E$-modules $T_\pi(\mathcal{F})$ et $\Omega_{\mathcal{F}}$ étant libres, on en déduit un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Omega_K[\pi^{n+1}] \arrow[r, "\xi", "\simeq"'] \arrow[d, "\pi"] & (\pi^{-n-1}\mathfrak{a}/\mathfrak{a}) \otimes_{\mathcal{O}_E} T_\pi(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_E} \Omega_{\mathcal{F}} \arrow[r, "\pi^{n+1}\cdot", "\simeq"'] \arrow[d, "\pi"] & (\mathfrak{a}/\pi^{n+1}\mathfrak{a}) \otimes_{\mathcal{O}_E} T_\pi(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_E} \Omega_{\mathcal{F}} \arrow[d, "\text{quotient}"] \\
\Omega_K[\pi^n] \arrow[r, "\xi", "\simeq"'] & (\pi^{-n}\mathfrak{a}/\mathfrak{a}) \otimes_{\mathcal{O}_E} T_\pi(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_E} \Omega_{\mathcal{F}} \arrow[r, "\pi^n\cdot", "\simeq"'] & (\mathfrak{a}/\pi^n\mathfrak{a}) \otimes_{\mathcal{O}_E} T_\pi(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_E} \Omega_{\mathcal{F}}
\end{tikzcd}$$

En prenant la limite projective, en tenant compte du fait $\lim_n \mathfrak{a}/\pi^n\mathfrak{a} \simeq \widehat{\mathfrak{a}}$, on obtient (ii).

Comme Ω_K est un $\mathcal{O}_E$-module de torsion par (i), on a $V_\pi(\Omega_K) = T_\pi(\Omega_K)[\pi^{-1}]$ (4.2.3). Par ailleurs, on a $\widehat{\mathfrak{a}}[\pi^{-1}] = \mathbf{C}$. Cela montre (iii) en inversant π dans (ii). □

4.2.5 - Exemple. Prenons $E = \mathbf{Q}_p$, $\pi = p$ et $\mathcal{F} = \widehat{\mathbf{G}}_m$. Le $\mathbf{Z}_p$-module de formes invariantes sur $\widehat{\mathbf{G}}_m$ admet une base $\omega_0 = dX/(1+X)$. Le module de Tate $T_p(\widehat{\mathbf{G}}_m)$ s'identifie à $\mathbf{Z}_p(1)$ via $x \mapsto 1+x$ (1.6.6). L'application (4.2.1.2) devient alors

$$\begin{aligned}
\xi = \xi_K : \overline{K} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p(1) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Omega_{\widehat{\mathbf{G}}_m} &\to \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K} \\
p^{-r} a \otimes \zeta \otimes \omega_0 &\mapsto a \cdot d\zeta_r/\zeta_r
\end{aligned}$$

où $\zeta = (\zeta_r)_r$ est une suite de racines de l'unité telle que $\zeta_0 = 1$ et $\zeta_{r+1}^p = \zeta_r$. Son noyau est

$$\mathfrak{a}_K = \{a \in \overline{K} : v_p(a) \geq -v_p(\mathfrak{D}_{K/K_0}) - \frac{1}{p-1}\}.$$

Ainsi, on a un isomorphisme $\mathcal{G}_K$-équivariant de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$-modules

$$\begin{aligned}
(\overline{K}/\mathfrak{a}_K)(1) &\simeq \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K} \\
p^{-r} a \otimes \zeta &\mapsto a \cdot d\zeta_r/\zeta_r,
\end{aligned}$$

puis un isomorphisme $\mathcal{G}_K$-équivariant de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}(1) &\simeq V_p(\Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}) \\
a \otimes \zeta = (p^{-r} a \otimes \zeta)_r &\mapsto (a \cdot d\zeta_r/\zeta_r)_r.
\end{aligned}$$

4.2.6 - Exemple. Le (4.2.4, ii) s'applique à deux situations : (a) $E = K$, $\pi = \pi_K$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\pi$, et (b) $E = \mathbf{Q}_p$, $\pi = p$, $\mathcal{F} = \widehat{\mathbf{G}}_m$. On obtient alors des isomorphismes $\mathcal{G}_K$-équivariants de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$-modules

$$\widehat{\mathfrak{a}}_{K,\mathcal{F}_\pi} \otimes_{\mathcal{O}_K} T_\pi(\mathcal{F}_\pi) \simeq T_\pi(\Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}) = T_p(\Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}) \simeq \widehat{\mathfrak{a}}_K \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p(1)$$

où l'on a négligé la partie $\Omega_{\mathcal{F}_\pi}$ (*resp.* $\Omega_{\widehat{\mathbf{G}}_m}$) en choisissant une $\mathcal{O}_K$-base (*resp.* $\mathbf{Z}_p$-base). On en tire l'isomorphisme $\mathcal{G}_K$-équivariant de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$-modules

$$\mathcal{O}_{\mathbf{C}}(\chi_\pi) \simeq \widehat{\mathfrak{a}}_{K,\mathcal{F}_\pi}^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{C}}} \widehat{\mathfrak{a}}_K \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p(1) = b\mathcal{O}_{\mathbf{C}}(1)$$

avec $b \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ vérifiant $v_p(b) = -v_p(\widehat{\mathfrak{a}}_{K,\mathcal{F}_\pi}) + v_p(\widehat{\mathfrak{a}}_K) = -v_p(\mathfrak{a}_{K,\mathcal{F}_\pi}) + v_p(\mathfrak{a}_K)$, donc

$$v_p(b) = \frac{1}{e(p^f-1)} - \frac{1}{p-1}$$

où $e = e(K/\mathbf{Q}_p)$, $f = f(K/\mathbf{Q}_p)$. En particulier, on a $\mathbf{C}(\chi_\pi) \simeq \mathbf{C}(\chi_{\mathrm{cyc}})$.

Maintenant, posons $M = \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(\chi_\pi) \in \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_{\mathbf{C}}}(\mathscr{G}_K)$ et $K_\infty = K(\zeta_{p^\infty})$. Avec les notations de (3.8.1), on a

$$M_\infty \simeq b\mathcal{O}_{\mathbf{C}}(1) \cap K_\infty(1).$$

C'est un $\mathcal{O}_{K_\infty}$-module libre si et seulement si $v_p(b) \in v_p(K_\infty^\times)$. Par exemple, si $K/\mathbf{Q}_p$ est non ramifiée, alors on a $v_p(K_\infty^\times) = v_p(\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^\infty})^\times) = \bigcup_n \frac{1}{(p-1)p^n}\mathbf{Z}$ et $v_p(b) = \frac{1}{p^f-1} - \frac{1}{p-1}$. Donc $v_p(b) \in v_p(K_\infty^\times)$ si et seulement si $K = \mathbf{Q}_p$.

4.3 Application aux variétés abéliennes

Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ avec une uniformisante $\pi = \pi_K$.

Une conjecture de Tate dit que les cohomologies étales géométriques d'une variété propre et lisse sur K, vues comme représentations de $\mathscr{G}_K$, sont de Hodge-Tate. Elle a été démontrée :

4.3.1 - Théorème (Faltings). *Soit X une variété propre et lisse sur K. Il y a un isomorphisme canonique $\mathbf{C}$-linéaire et $\mathscr{G}_K$-équivariant*

$$\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}_p} H^n_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p) \simeq \bigoplus_{q=0}^n \mathbf{C}(-q) \otimes_K H^{n-q}(X, \Omega^q_{X/K}) \tag{4.3.1.1}$$

où $\Omega^1_{X/K}$ est le $\mathcal{O}_X$-module des 1-différentiels de X par rapport à K et $\Omega^q_{X/K} = \bigwedge^q \Omega^1_{X/K}$.

Dans le cas où $X = A$ est une variété abélienne sur K, l'algèbre graduée $H^*_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)$ s'identifie à l'algèbre des formes multilinéaires alternées sur le module de Tate $T_p(A) = \varprojlim A(\overline{K})[p^n]$, et la cohomologie de Hodge $H^*_{\mathrm{Hodge}}(A) = \bigoplus_{m\geq 0}\left(\bigoplus_{q=0}^m H^{m-q}(A, \Omega^q_{A/K})\right)$ s'identifie à l'algèbre extérieure de $H^1_{\mathrm{Hodge}}(A) = H^1(A, \mathcal{O}_A) \bigoplus H^0(A, \Omega^1_{A/K})$. La décomposition (4.3.1) se ramène alors à une décomposition canonique $\mathbf{C}$-linéaire et $\mathscr{G}_K$-équivariant

$$\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(T_p(A), \mathbf{Q}_p) \simeq \mathbf{C} \otimes_K H^1(A, \mathcal{O}_A) \bigoplus \mathbf{C}(-1) \otimes_K H^0(A, \Omega^1_{A/K}) \tag{4.3.1.2}$$

Cette dernière se réduit au théorème suivant :

4.3.2 - Théorème (Tate-Raynaud-Fontaine). *Soit A une variété abélienne sur K. Il y a des applications K-linéaires bijectives et fonctorielles en A*

$$\rho_A^1 : H^1(A, \mathcal{O}_A) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[\mathscr{G}_K]}(T_p(A), \mathbf{C})$$
$$\rho_A^0 : H^0(A, \Omega^1_{A/K}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[\mathscr{G}_K]}(T_p(A), \mathbf{C}(1)).$$

En effet, ce théorème implique grâce à (2.5.4) que la partie à droite de (4.3.1.2) s'envoie injectivement dans la partie à gauche en tant que $\mathbf{C}$-représentations de $\mathscr{G}_K$; c'est bijectif pour des raisons de dimension puisque $T_p(A)$ est un $\mathbf{Z}_p$-module libre de rang $2\dim_K A$, et que $H^1(A, \mathcal{O}_A)$ et $H^0(A, \Omega^1_{A/K})$ sont tous de K-dimension $\dim_K A$.

On verra que ce théorème est en fait équivalent à l'énoncé suivant qui est apparemment plus faible :

4.3.3 - Théorème. *Soit A une variété abélienne sur K. Il y a une application K-linéaire injective et fonctorielle en A*

$$\rho_A^0 : H^0(A, \Omega^1_{A/K}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[\mathscr{G}_K]}(T_p(A), \mathbf{C}(1)).$$

On se propose de démontrer ces théorèmes seulement dans le cas où $A = E$ est une *courbe elliptique sur K à bonne réduction.* On verra que le théorème (4.3.3) implique le théorème (4.3.2) dans le cas des courbes elliptiques. On démontrera ensuite ce dernier théorème après quelques rappels sur les courbes elliptiques sur K à bonne réduction.

4.3.4. Implication (4.3.3) $\Rightarrow$ (4.3.2). Soit E une courbe elliptique sur K (à bonne réduction). L'accouplement de Weil induit un accouplement parfait $\mathscr{G}_K$-équivariant

$$T_p(E) \times T_p(E) \to \mathbf{Z}_p(1). \tag{4.3.4.1}$$

On obtient alors un isomorphisme canonique $\mathscr{G}_K$-équivariant

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(T_p(E),\mathbf{C}(1)) = \mathbf{C}(1)\otimes_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{Z}_p}T_p(E))^\vee \simeq \mathbf{C}\otimes_{\mathbf{Z}_p}T_p(E).$$

On peut donc réécrire $\rho_E^0 : H^0(E,\Omega^1_{E/K}) \to (\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{Z}_p}T_p(E))^{\mathscr{G}_K}$. Le morphisme canonique $\mathscr{G}_K$-équivariant $\mathbf{C}\otimes_K(\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{Z}_p}T_p(E))^{\mathscr{G}_K}\to\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{Z}_p}T_p(E)$ est injectif (2.5.4). En composant avec $1\otimes\rho_E^0$ et en prenant le dual, on obtient le diagramme commutatif $\mathscr{G}_K$-équivariant

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}\otimes_K H^0(E,\Omega^1_{E/K}) \arrow[r, hook] & \mathbf{C}\otimes_{\mathbf{Z}_p}T_p(E) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\simeq"] & \cdots/\cdots \\
(\cdots/\cdots)^\vee \arrow[r, hook] & \mathbf{C}(1)\otimes_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{Z}_p}T_p(E))^\vee \arrow[r, two heads] & \mathbf{C}(1)\otimes_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}\otimes_K H^0(E,\Omega^1_{E/K}))^\vee
\end{tikzcd}$$

où la composée du haut à gauche au bas à droite est zéro puisque $\mathbf{C}^{\mathscr{G}_K}=K$ mais $\mathbf{C}(1)^{\mathscr{G}_K}=0$ (3.2.1). Alors comme ρ_E^0 est injectif, on a

$$\dim_K H^0(E,\Omega^1_{E/K}) + \dim_K H^0(E,\Omega^1_{E/K})^\vee \le \mathrm{rang}_{\mathbf{Z}_p}T_p(E)$$

qui est une égalité si et seulement si ρ_E^0 est un isomorphisme. On sait que pour une courbe elliptique E, on a la dualité de Serre $H^0(E,\Omega^1_{E/K})\simeq H^1(E,\mathcal{O}_E)^\vee$, $\dim_K H^0(E,\Omega^1_{E/K})=1$ et $T_p(E)\simeq\mathbf{Z}_p^2$. Donc, cette inégalité est une égalité, ρ_E^0 est alors bijectif et on obtient une suite exacte courte

$$0\to\mathbf{C}\otimes_K H^0(E,\Omega^1_{E/K})\longrightarrow\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{Z}_p}T_p(E)\longrightarrow\mathbf{C}(1)\otimes_K H^1(E,\mathcal{O}_E)\to 0.$$

Tordons cette suite exacte par $\mathbf{C}(-1)$ et ensuite prenons les $\mathscr{G}_K$-invariants. Comme on a $\mathbf{C}^{\mathscr{G}_K}=K$ et $H^i(\mathscr{G}_K,\mathbf{C}(-1))=0$ pour $i=0,1$ (3.2.1), on obtient une suite exacte (2.2.8)

$$0\to 0\to(\mathbf{C}(-1)\otimes_{\mathbf{Z}_p}T_p(E))^{\mathscr{G}_K}\to H^1(E,\mathcal{O}_E)\to 0.$$

Cela combiné avec l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(T_p(E),\mathbf{C}(1))\simeq\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{Z}_p}T_p(E)$ donne une application

$$\rho_E^1 : H^1(E,\mathcal{O}_E)\to\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(T_p(E),\mathbf{C})^{\mathscr{G}_K}\simeq\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[\mathscr{G}_K]}(T_p(E),\mathbf{C})$$

qui est K-linéaire, bijective et fonctorielle.

4.3.5 - Remarque. Pour A une variété abélienne, on pourrait démontrer (4.3.3)⟹(4.3.2) de la même façon ; mais à la place de (4.3.4.1), on utiliserait l'accouplement $T_p(A)\times T_p(A^*)\to\mathbf{Z}_p(1)$ où A^* est la variété duale de A.

4.3.6. Courbes elliptiques sur K à bonne réduction. Une telle courbe E est définie par une équation de Weierstrass entière minimale

$$Y^2Z+a_1XYZ+a_3YZ^2=X^3+a_2X^2Z+a_4XZ^2+a_6Z^3,\quad a_i\in\mathcal{O}_K$$

avec discriminant $\Delta\in\mathcal{O}_K^\times$, ayant $(0:1:0)$ comme élément neutre. Cette équation définit un schéma $\mathcal{E}\hookrightarrow\mathbb{P}^2_{\mathcal{O}_K}$ projectif et plat sur $\mathcal{O}_K$, que l'on appellera un *modèle de Weierstrass entier minimal* de E, dont la fibre générique est isomorphe à E et la fibre spéciale est lisse. Donc $\mathcal{E}$ est un schéma lisse sur $\mathcal{O}_K$, et $\mathcal{E}$ possède une unique structure de schéma en groupes $m:\mathcal{E}\times_{\mathcal{O}_K}\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ telle que sa restriction à la fibre générique soit la loi de groupe usuelle sur E. On a un morphisme de groupes $\mathcal{E}(\mathcal{O}_{\overline{K}})\to E(\overline{K})$, qui est bijectif par le critère valuatif, ou plus explicitement par considération des coordonnées projectives.

Par lissité, $\Omega^1_{\mathcal{E}/\mathcal{O}_K}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-module localement libre. Donc $H^0(\mathcal{E},\Omega^1_{\mathcal{E}/\mathcal{O}_K})$ est un $\mathcal{O}_K$-module sans torsion. Comme $\mathcal{E}$ est séparé sur $\mathcal{O}_K$ et quasi-compact, et que K est plat sur $\mathcal{O}_K$, on a $K\otimes_{\mathcal{O}_K}H^0(\mathcal{E},\Omega^1_{\mathcal{E}/\mathcal{O}_K})=H^0(E,\Omega^1_{E/K})$, qui est de K-dimension 1 car E est une courbe elliptique. De plus, $H^0(\mathcal{E},\Omega^1_{\mathcal{E}/\mathcal{O}_K})$ est un $\mathcal{O}_K$-module de type fini car $\mathcal{E}$ est propre sur $\mathcal{O}_K$. Donc $H^0(\mathcal{E},\Omega^1_{\mathcal{E}/\mathcal{O}_K})$ est un $\mathcal{O}_K$-module libre de rang 1.

On a $E=U_1\bigcup U_2$ où $U_1=E\backslash V(Y)$, $U_2=E\backslash V(Z)$. On peut expliciter une forme $\omega_0\in H^0(\mathcal{E},\Omega^1_{\mathcal{E}/\mathcal{O}_K})$ définie par

$$dt/(1-a_1t-2a_3s-a_2t^2-2a_4ts-3a_6s^2)=ds/(a_1s+3t^2+2a_2ts+a_4s^2)\in H^0(U_1,\Omega^1_{\mathcal{E}/\mathcal{O}_K})$$
$$dx/(2y+a_1x+a_3)=dy/(3x^2+2a_2x+a_4-a_1y)\in H^0(U_2,\Omega^1_{\mathcal{E}/\mathcal{O}_K}).$$

où $(t:-1:s)$ (*resp.* $(x:y:1)$) sont des coordonnées sur U_1 (*resp.* sur U_2). La forme ω_0 est bien définie puisque, d'une part on vérifie qu'au moins l'une de ces quatres formules est bien définie grâce à la lissité des fibres générique et spéciale, et d'autre part elles coïncident sur des ouverts de définition communs. Cette expression permet aussi de voir que la forme $\pi^{-1}\omega_0$ n'est pas partout bien définie sur $\mathcal{E}$. Ainsi, on obtient

$$H^0(\mathcal{E},\Omega^1_{\mathcal{E}/\mathcal{O}_K}) = \mathcal{O}_K \cdot \omega_0.$$

Toute forme $\omega \in H^0(\mathcal{E},\Omega^1_{\mathcal{E}/\mathcal{O}_K})$ est invariante sur $\mathcal{E}$. En effet, en notant pr_1 (*resp.* pr_2) la projection de $\mathcal{E}\times_{\mathcal{O}_K}\mathcal{E}$ sur sa première (*resp.* seconde) composante, considérons la forme globale

$$m^*\omega - pr_1^*\omega - pr_2^*\omega \tag{4.3.6.1}$$

sur $\mathcal{E}\times_{\mathcal{O}_K}\mathcal{E}$. Par la lissité de $\mathcal{E}\times_{\mathcal{O}_K}\mathcal{E}$ sur $\mathcal{O}_K$ et la platitude de K sur $\mathcal{O}_K$, on obtient que le $\mathcal{O}_K$-module $H^0(\mathcal{E}\times_{\mathcal{O}_K}\mathcal{E},\Omega^1_{\mathcal{E}\times_{\mathcal{O}_K}\mathcal{E}/\mathcal{O}_K})$ est sans torsion et s'envoie injectivement dans $H^0(E\times_K E,\Omega^1_{E\times_K E/K}) = K\otimes_{\mathcal{O}_K} H^0(\mathcal{E}\times_{\mathcal{O}_K}\mathcal{E},\Omega^1_{\mathcal{E}\times_{\mathcal{O}_K}\mathcal{E}/\mathcal{O}_K})$. L'image de (4.3.6.1) est zéro car toute forme globale sur E est invariante. Donc (4.3.6.1) s'annule.

Le passage de E à $\mathcal{E}$ est « fonctoriel » : soit E' une autre courbe elliptique sur K à bonne réduction, soit $\mathcal{E}'$ un modèle de Weierstrass entier minimal de E' ; alors tout morphisme (de courbes elliptiques) $E\to E'$ s'étend uniquement en un morphisme (de schémas en groupes) $\mathcal{E}\to\mathcal{E}'$. En particulier, le modèle de Weierstrass entier minimal de E est unique à l'isomorphisme près.

4.3.7. Construction de ρ^0_E. Soit E une courbe elliptique à bonne réduction sur K. Soit $\mathcal{E}$ un modèle de Weierstrass entier minimal de E. Sa fibre générique $\mathcal{E}_K$ est isomorphe à E, avec le point $(0:1:0)\in\mathcal{E}_K$ identifié à l'élément neutre de E.

Définissons un accouplement par pull-back

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathcal{E},\Omega^1_{\mathcal{E}/\mathcal{O}_K})\times\mathcal{E}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) & \to & \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K} \\ (\omega,u) & \mapsto & u^*\omega \end{array} \tag{4.3.7.1}$$

qui est évidemment $\mathcal{O}_K$-linéaire en la première variable et $\mathcal{G}_K$-équivariant en la deuxième variable. Comme E est à bonne réduction, toute forme de $H^0(\mathcal{E},\Omega^1_{\mathcal{E}/\mathcal{O}_K})$ est invariante, d'où la $\mathbf{Z}$-linéarité en la deuxième variable. Cet accouplement donne alors un morphisme $\mathcal{O}_K$-linéaire

$$\begin{array}{rcll} H^0(\mathcal{E},\Omega^1_{\mathcal{E}/\mathcal{O}_K}) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[\mathcal{G}_K]}\big(\mathcal{E}(\mathcal{O}_{\overline{K}}),\Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}\big) & (4.3.7.2)\\ & \simeq & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[\mathcal{G}_K]}\big(E(\overline{K}),\Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}\big) & \\ & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[\mathcal{G}_K]}\big(V_p(E(\overline{K})),V_p(\Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K})\big) & (4.3.7.3)\\ & \simeq & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[\mathcal{G}_K]}\big(V_p(E(\overline{K})),\mathbf{C}(1)\big) \quad \text{selon (4.2.5)} & \\ & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[\mathcal{G}_K]}\big(T_p(E),\mathbf{C}(1)\big) & (4.3.7.4) \end{array}$$

où $V_p(-) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}[p^{-1}],-)$ pour un groupe abélien et (attention à l'abus de notation potentiel) $V_p(E) = \mathbf{Q}_p\otimes_{\mathbf{Z}_p}T_p(E) = V_p(E_{p^\infty}(\overline{K}))$ avec $E_{p^\infty}(\overline{K})$ la réunion des groupes de torsion $E(\overline{K})[p^n]$ ($n\in\mathbb{N}$). On vérifie bien que l'image de $H^0(\mathcal{E},\Omega^1_{\mathcal{E}/\mathcal{O}_K})$ tombe dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[\mathcal{G}_K]}\big(T_p(E),\mathbf{C}(1)\big)\subset\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[\mathcal{G}_K]}\big(T_p(E),\mathbf{C}(1)\big)$. Par extension des scalaires, on obtient un morphisme K-linéaire $\mathcal{G}_K$-équivariant

$$\rho^0_{E,\mathcal{E}} : H^0(E,\Omega^1_{E/K}) = K\otimes_{\mathcal{O}_K} H^0(\mathcal{E},\Omega^1_{\mathcal{E}/\mathcal{O}_K}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[\mathcal{G}_K]}(T_p(E),\mathbf{C}(1))$$

qui dépend *a priori* du choix de modèle de Weierstrass entier minimal $\mathcal{E}$ de E. La « fonctorialité » de l'association de $\mathcal{E}$ à E montre que $\rho^0_{E,\mathcal{E}}$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{E}$ et est fonctoriel en E (qui est toujours supposée à bonne réduction). On peut alors définir $\rho^0_E = \rho^0_{E,\mathcal{E}}$.

4.3.8. Injectivité de ρ^0_E. Il suffit de montrer l'injectivité de chaque morphisme entre (4.3.7.2), (4.3.7.3), (4.3.7.4).

(i) Le groupe $E(\overline{K})$ étant p-divisible, l'application $V_p(E(\overline{K}))\to E(\overline{K})$, $f\mapsto f(1)$ est surjective. Donc le morphisme (4.3.7.3) est injectif.

(ii) Concernant (4.3.7.4), posons $J = E(\overline{K})/E_{p^\infty}(\overline{K})$, c'est un groupe uniquement p-divisible, donc l'application $V_p(J)\to J$, $f\mapsto f(1)$ est bijective. La suite exacte $0\to E_{p^\infty}(\overline{K})\to E(\overline{K})\to J\to 0$ induit alors une suite exacte

$$0\to V_p(E_{p^\infty}(\overline{K}))\to V_p(E(\overline{K}))\to J\to 0.$$

En effet, il suffit de vérifier son exactitude à droite : celle-ci résulte de la surjectivité de $V_p\big(E(\overline{K})\big) \to E(\overline{K})$ et de $E(\overline{K}) \to J$. En appliquant $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[\mathscr{G}_K]}(-,\mathbf{C}(1))$, on obtient une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[\mathscr{G}_K]}\big(J,\mathbf{C}(1)\big) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[\mathscr{G}_K]}\big(V_p(E(\overline{K})),\mathbf{C}(1)\big) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[\mathscr{G}_K]}\big(\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T_p(E),\mathbf{C}(1)\big).$$

Le noyau de (4.3.7.4) s'identifie alors à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[\mathscr{G}_K]}(J,\mathbf{C}(1))$. Mais on a $\overline{K} = \bigcup L = \bigcup \overline{K}^{\mathscr{G}_L}$ où L parcourt les extensions galoisiennes finies de K, donc $J = \bigcup J^{\mathscr{G}_L}$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[\mathscr{G}_K]}(J,\mathbf{C}(1)) = \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[\mathscr{G}_K]}(J^{\mathscr{G}_L},\mathbf{C}(1)) = \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[\mathscr{G}_K]}(J^{\mathscr{G}_L},\mathbf{C}(1)^{\mathscr{G}_L})$. Mais on a $\mathbf{C}(1)^{\mathscr{G}_L} = 0$ (3.2.1), donc on a $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[\mathscr{G}_K]}(J,\mathbf{C}(1)) = 0$.

(iii) Il reste à traiter (4.3.7.2). D'abord un petit rappel sur les courbes elliptiques : avec les coordonnées $(t : -1 : s)$ sur U_1, l'équation de Weierstrass de E devient

$$s = t^3 + a_1 ts + a_2 t^2 s + a_3 s^2 + a_4 ts^2 + a_6 s^3 = f(t,s).$$

Il existe une unique série formelle $s(T) \in \mathbf{Q}[a_1,\dots,a_6][\![T]\!]$ telle que $s(T) = f(T,s(T))$. En fait, on a même $s(T) \in T^3 + T^4\mathbf{Z}[a_1,\dots,a_6][\![T]\!]$ de sorte que l'on a $s(t) \in \mathfrak{m}_{\overline{K}}$ pour tout $t \in \mathfrak{m}_{\overline{K}}$.

Soit maintenant $\omega = c\omega_0$ avec $c \in \mathcal{O}_K\backslash\{0\}$. Il faudrait trouver $u \in \mathcal{E}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ tel que $u^*\omega \neq 0$. Pour tout $\tau \in \mathfrak{m}_{\overline{K}}$, notons $u_\tau = (\tau : -1 : s(\tau)) \in \mathcal{E}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ qui correspond au morphisme de $\mathcal{O}_K$-algèbres

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(U_1) = \mathcal{O}_K[t,s]/(s - f(t,s)) \to \mathcal{O}_K, \quad t \mapsto \tau,\ s \mapsto s(\tau).$$

On a $u_\tau^*\omega = c\alpha(\tau)d\tau$ où

$$\alpha(T) = \big(1 - a_1 T - 2a_3 s(T) - a_2 T^2 - 2a_4 T s(T) - 3a_6 s(T)^2\big)^{-1} \in 1 + T\mathcal{O}_K[\![T]\!].$$

On obtient alors $v_K(c\alpha(\tau)) = v_K(c) < +\infty$. D'autre part, soit τ_0 une racine de l'équation $X^{p^d} = \pi$ où $d \in \mathbb{N}^*$. Alors $K(\tau_0)$ est une extension finie de K totalement ramifiée de degré p^d avec une uniformisante τ_0. On a $v_K(\tau_0) = 1/p^d$ et d'après (4.1.4.1) et (4.1.5, iii), $\mathrm{Ann}(d\tau_0) = \mathcal{O}_{\overline{K}}\mathfrak{D}_{K(\tau_0)/K}$. Comme $v_K(\mathfrak{D}_{K(\tau_0)/K}) = v_K(p^d\tau_0^{p^d-1}) > d$, en prenant $d \geq v_K(c)$, on obtient

$$u_{\tau_0}^*\omega = c\alpha(\tau_0)d\tau_0 \neq 0.$$

4.3.9 - Remarque. La démonstration de (4.3.3) dans le cas général procède de façon similaire, sauf que la $\mathbf{Z}$-linéarité de l'accouplement (4.3.7.1) en la deuxième variable et l'injectivité de (4.3.7.2) ne sont plus vraies en général : soit A une variété abélienne quelconque sur K, il n'existe pas forcément de modèle $\mathcal{A}$ de A propre plat sur $\mathcal{O}_K$ qui de plus est lisse et possède une structure de schéma en groupes compatible à celle de A.

Il faudrait modifier l'accouplement (4.3.7.1). Cela se fait en considérant $p^r H^0(\mathcal{A},\Omega^1_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_K})$ au lieu de $H^0(\mathcal{A},\Omega^1_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_K})$ (et aussi p^r fois ce qui correspond à $H^0(\mathcal{A}\times_{\mathcal{O}_K}\mathcal{A},\Omega^1_{\mathcal{A}\times_{\mathcal{O}_K}\mathcal{A}/\mathcal{O}_K})$ pour montrer la $\mathbf{Z}$-linéarité) où r est suffisamment grand pour tuer la partie de torsion de ces $\mathcal{O}_K$-modules ***de type fini*** (ce qui résulte de la propreté du modèle $\mathcal{A}$). On renvoie à [Fon82, §3] pour les détails.

Références

[Ber] Laurent Berger. Local Fields, notes de cours. http://perso.ens-lyon.fr/laurent.berger/autrestextes/LocalFieldsM2.pdf.

[FO08] Jean-Marc Fontaine and Yi Ouyang. Theory of p-Adic Galois Representations. *preprint*, 2008.

[Fon04] Jean-Marc Fontaine. Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques. In Berthelot Pierre, Fontaine Jean-Marc, Illusie Luc, Kato Kazuya, and Rapoport Michael, editors, *Cohomologie p-adiques et applications arithmétiques (III)*, number 295 in Astérisque, pages 1–115. Société mathématique de France, 2004.

[Fon82] Jean-Marc Fontaine. Formes Différentielles et Modules de Tate des Variétés Abéliennes sur les Corps Locaux. *Inventiones mathematicae*, 65 :379–410, 1981/82.

[GS06] Philippe Gille and Tamás Szamuely. *Central Simple Algebras and Galois Cohomology*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2006.

[Laz65] Michel Lazard. Groupes analytiques p-adiques. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 26 :5–219, 1965.

[Liu06] Qing Liu. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*. Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford University Press, 2006.

[Sen72] Shankar Sen. Ramification in p-Adic Lie Extensions. *Inventiones mathematicae*, 17 :44–50, 1972.

[Sen73] Shankar Sen. Lie Algebras of Galois Groups Arising from Hodge-Tate Modules. *Annals of Mathematics*, 97(1) :160–170, 1973.

[Sen80] Shankar Sen. Continuous Cohomology and p-Adic Galois Representations. *Inventiones mathematicae*, 62(1) :89–116, 1980.

[Sen93] Shankar Sen. Galois Cohomology and Galois Representations. *Inventiones mathematicae*, 112(1) :639–656, 1993.

[Ser95] Jean-Pierre Serre. *Local Fields*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1995.

[Ser97] Jean-Pierre Serre. *Abelian l-Adic Representations and Elliptic Curves*. CRC Press, 1997.

[Tat67] John Tate. p-Divisible Groups. In *Proceedings of a conference on Local Fields*, pages 158–183. Springer, 1967.

[Yam96] Shuji Yamagata. Integral representations of Galois groups of local fields. 1996.